ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

JAN KUBIK

Instytut Matematyki

ALGEBRAICZNE WŁASNOŚCI RÓWNAŃ STATYKI UKŁADÓW LEPKOSPRĘŻYSTYCH
(Komunikat)

Streszczenie. W pracy podano rozszerzoną zasadę superpozycji w statyce układów lepkosprężystych. Do konstrukcji tej zasady wykorzystano rozwiązanie podobne, które wyznacza pewna algebra liniowa.

Wstęp

Będziemy rozpatrywali pewne algebraiczne własności równań układu lepkosprężystego

$$\mathbf{A} * \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

gdzie $\mathbf{A} = \mathring{\mathbf{A}}_{[n\times n]}(t)$, $\mathring{\mathbf{A}}$ jest macierzą sprężystości analogicznego, tj. znajdującego się w tej samej konfiguracji układu sprężystego, $R(t)$ - funkcją zależną od reologicznych własności materiału układu (por. 1, 2, 3), $\mathring{\mathbf{Y}}_{[n\times 1]}$ - prędkością poszukiwanych funkcji układu (sił lub przemieszczeń), $\mathbf{C}_{[n\times 1]}(t)$ - macierzą funkcji znanych, a symbol $*$ oznacza mnożenie splotowe macierzy.

Równanie (1.1) będziemy traktowali jako liniowe przekształcenie w pewnej n-wymiarowej przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}_n$ nad polem dystrybucji D z mnożeniem splotowym. Badając własności tego przekształcenia uzyskamy nowe wyniki w statyce układów lepkosprężystych. W pierwszej kolejności wprowadzimy pewną algebrę liniową, której elementy generować będą rozwiązanie podobne, a następnie podamy ogólną postać tzw. zasady superpozycji.

2. Algebry rozwiązań podobnych

Przed wprowadzeniem algebr rozwiązań podobnych przeanalizujemy niektóre własności wielomianów macierzy $\mathbf{A}$ (por. [4, 5])

$$\mathbf{B} = \varphi_0 * \mathbf{I} + \varphi_1 * \mathbf{A} + \ldots + \varphi_n * \mathbf{A}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n \in D. \qquad (2.1)$$

Wyrażenie powyższe jest ogólną postacią wielomianu macierzy $\mathbf{A}$, przy czym macierz $\mathbf{B}$ jest przemienna z macierzą $\mathbf{A}$. Z faktu tego wynika pewien ciekawy wniosek: jeżeli przemnożymy równanie (1.1) lewostronnie przez macierz $\mathbf{B}$, to wobec przemienności mnożenia splotowego będzie zachodziło $\mathbf{A} * (\mathbf{B} * \dot{\mathbf{Y}}) = (\mathbf{B} * \mathbf{C})$. Wynika stąd, że wektorowi ${}^1\mathbf{C} = \mathbf{B} * \mathbf{C}$ będzie przyporządkowany wektor ${}^1\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B} * \dot{\mathbf{Y}}$ - nowe rozwiązanie równania (1.1). Uzyskujemy w ten sposób dla pary wektorów $(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{Y}}) \in \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n$ nowe wektory ${}^1\mathbf{C}, {}^1\dot{\mathbf{Y}}$, które również spełniają równanie (1.1)[x]. Można wykazać, że zbiór macierzy postaci (2.1) wyznacza algebrę liniową nad polem dystrybucji D. Algebrę tę nazwiemy algebrą rozwiązań podobnych i oznaczymy AL. Macierze $\mathbf{B} \in$ AL generują nowe rozwiązanie równań statyki układów lepkosprężystych, które nazwiemy rozwiązaniami podobnymi. Natomiast rząd algebry AL jest równy statycznej względnie geometrycznej niewyznaczalności układu.

3. Zasada superpozycji

W liniowej mechanice ciała odkształcalnego istotne znaczenie posiada zasada superpozycji; stosowanie jej umożliwia konstruowanie nowych rozwiązań zadań mechaniki na podstawie pewnych innych, znanych rozwiązań. Należy podkreślić, że zasada ta wynika z liniowości równań mecha-

---

[x] Równanie (1.1) można przedstawić w równoważnej postaci

$$\mathbf{A} * \mathbf{Y} = \mathbf{C} * \mathrm{H} + \mathbf{A}\mathbf{Y}_0, \qquad (1.1')$$

gdzie $\mathbf{Y}_0$ jest wartością początkową wektora $\mathbf{Y}$, a H(t) funkcją Heaviside'a. W tym przypadku wektorowi ${}^1\mathbf{C} = \mathbf{B} * (\mathbf{C} * \mathrm{H} + \mathbf{A}\mathbf{Y}_0)$ przyporządkujemy wektor ${}^1\mathbf{Y} = \mathbf{B} * \mathbf{Y}$.

niki, a w przypadku szczególnym - z równań (1.1). W postaci znanej można ją sformułować jako następujące twierdzenie:

Z.S_1: Jeżeli pary wektorów $(\mathbf{C}_1, \dot{\mathbf{Y}}_1), \ldots, (\mathbf{C}_n, \dot{\mathbf{Y}}_n) \in \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n$ spełniają równanie (1.1), to para

$$(\alpha_1 \mathbf{C}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{C}_n,\ \alpha_1 \dot{\mathbf{Y}}_1 + \ldots + \alpha_n \dot{\mathbf{Y}}_n), \quad \alpha_1, \ldots \alpha_n \in R$$

również spełnia równanie (1.1).

Słuszność tego twierdzenia wynika z liniowości przekształcenia (1.1) w $\mathcal{V}_n$.

Wykorzystamy teraz algebrę rozwiązań podobnych, dla układu (1.1), do sformułowania ogólnej postaci zasady superpozycji w układach lepkosprężystych. Będziemy mianowicie rozpatrywali pary $(\overset{1}{\mathbf{C}}, \overset{1}{\dot{\mathbf{Y}}})$ należące do rodziny rozwiązań podobnych $P((\mathbf{C}, \dot{\mathbf{Y}}), (\overset{1}{\mathbf{C}}, \overset{1}{\dot{\mathbf{Y}}}) \in P$.

Pozostaje prawdziwe następujące twierdzenie:

Z.S_2: Jeżeli pary $(\overset{1}{\mathbf{C}}, \overset{1}{\dot{\mathbf{Y}}}), \ldots, (\overset{n}{\mathbf{C}}, \overset{n}{\dot{\mathbf{Y}}}) \in P$, to para $(\hat{\mathbf{C}}, \hat{\dot{\mathbf{Y}}})$, gdzie $\hat{\mathbf{C}} = \varphi_1 * \overset{1}{\mathbf{C}} + \varphi_2 * \overset{2}{\mathbf{C}} + \ldots + \varphi_n * \overset{n}{\mathbf{C}}$, $\hat{\dot{\mathbf{Y}}} = \varphi_1 * \overset{1}{\dot{\mathbf{Y}}} + \varphi_2 * \overset{2}{\dot{\mathbf{Y}}} + \ldots + \varphi_n * \overset{n}{\dot{\mathbf{Y}}}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in D$, również spełnia równanie (1.1).

Korzystając z równania (1.1') możemy napisać równoważne do ZS_2 twierdzenie

Z.S_3: Jeżeli pary $(\overset{1}{\mathbf{C}} * H + \mathbf{A}\overset{1}{\mathbf{Y}}_0, \overset{1}{\mathbf{Y}}), \ldots (\overset{n}{\mathbf{C}} * H + \mathbf{A}(\overset{n}{\mathbf{Y}}_0), \overset{n}{\mathbf{Y}}) \in P'$ to para $(\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{Y}})$, gdzie

$$\hat{\mathbf{C}} = \varphi_1 * (\overset{1}{\mathbf{C}} * H + \mathbf{A}(\overset{1}{\mathbf{Y}}_0)) + \varphi_2 * (\overset{2}{\mathbf{C}} * H + \mathbf{A}(\overset{2}{\mathbf{Y}}_0)) + \ldots + \varphi_n * (\overset{n}{\mathbf{C}} * H + \mathbf{A}(\overset{n}{\mathbf{Y}}_0)),$$

$\hat{\mathbf{Y}} = \varphi_1 * \overset{1}{\mathbf{Y}} + \varphi_2 * \overset{2}{\mathbf{Y}} + \ldots + \varphi_n * \overset{n}{\mathbf{Y}}$, również spełnia równanie (1.1).

Ostatnią postać zasady superpozycji uzyskujemy rozpatrując ponownie n-par wektorów $(\mathbf{C}_1, \mathbf{Y}_1), \ldots, (\mathbf{C}_n, \mathbf{Y}_n)$ oraz algebrę AL:

Z.S_4: Jeżeli pary $(\mathbf{C}_1, \dot{\mathbf{Y}}_1), \ldots, (\mathbf{C}_n, \dot{\mathbf{Y}}_n) \in \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n$ spełniają równanie (1.1), to para

$$(\underset{1}{\mathbf{B}} * \underset{1}{\mathbf{C}} + \underset{2}{\mathbf{B}} * \underset{2}{\mathbf{C}} + \ldots + \underset{n}{\mathbf{B}} * \underset{n}{\mathbf{C}}, \underset{1}{\mathbf{B}} * \underset{1}{\dot{\mathbf{Y}}} + \underset{2}{\mathbf{B}} * \underset{2}{\dot{\mathbf{Y}}} + \ldots + \underset{n}{\mathbf{B}} * \underset{n}{\dot{\mathbf{Y}}}), \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots \mathbf{B}_n \in AL,$$

spełnia również równanie (1.1).

Przytoczone tutaj zależności są prawdziwe, ponieważ każda para wektorów postaci $(\mathbf{B} * \mathbf{C}, \mathbf{B} * \dot{\mathbf{Y}})$ również spełnia równanie (1.1).

Wyniki ZS_2, ZS_3 i ZS_4 stanowią istotne rozszerzenie zasady superpozycji. W szczególności z ZS_2 i ZS_3 wynika, ile różnych stanów naprężeń i przemieszczeń można uzyskać z każdego rozwiązania równań statyki układów lepkosprężystych.

LITERATURA

1. Kubik J.: Metoda sił dla układów lepkosprężystych, Rozpr. Inż. 18, 4 (1970), 595-605.
2. Kubik J.: Metoda przemieszczeń dla układów lepkosprężystych, Rozpr. Inż. 19, 1 (1971), 97-110.
3. Kubik J.: Podstawy teorii konstrukcji prętowych na ośrodku górniczym, Mech. Teor. i Stos. 1, 11 (1973), 35-46.
4. Gantmacher F.R.: Teopia matric, Nauka, Moskwa 1967.
5. Gelfand J.M.: Lekcji po liniejnoj algebre, Nauka, Moskwa 1971.