ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 25 Nr kol. 498

KAROL PETHE

O WSPÓŁCZYNNIKACH FUNKCJI POLOWO P-LISTNYCH

Streszczenie. Niniejsza praca dotyczy problemu współczynników funkcji polowo średnio p-listnych. Wykorzystano w niej metodę polową, opierając się głównie na analogicznej nierówności jaką podał G.M. Gołuzin dla funkcji p-listnych.

Niech $w = f(z)$ będzie funkcją holomorficzną lub meromorficzną w obszarze D, i niech $n(w) = n(R\,e^{i\varphi})$ oznacza liczbę pierwiastków równania $f(z) = R\,e^{i\varphi}$, $(R \geqslant 0, \varphi$ - rzeczywiste).

Funkcję $f(z)$ nazywamy p-listną w obszarze D, jeżeli $n(R\,e^{i\varphi}) \leqslant p$ (p-naturalne).

Funkcję $f(z)$ nazywamy polowo średnio p-listną (p-dodatnie) w obszarze D, jeżeli zachodzi jeden z warunków

A. $$W(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \varrho\, n(\varrho e^{i\varphi})\,d\varrho\, d\varphi \leqslant p\,R^2$$

dla każdego $R \geqslant 0$

B. $$W(r, R) = \frac{1}{\pi}\int_r^R\int_0^{2\pi} \varrho\, n(\varrho e^{i\varphi})\,d\varrho\, d\varphi \leqslant p\,(R^2 - r^2)$$

dla każdego $r \geqslant 0$ i dostatecznie dużych R.

Oznaczmy przez

S_p - klasę funkcji postaci

$$\text{(I)} \qquad f(z) = z^p(1 + a_{p+1} z + a_{p+2} z^2 + \dots)$$

holomorficznych i p-listnych w kole $K = z: \{z: |z|<1\}$

Σ_p - klasę funkcji postaci

$$\text{(II)} \qquad F(\zeta) = \zeta^p\left(1 + \frac{b_{-p+1}}{\zeta} + \frac{b_{-p+2}}{\zeta^2} + \dots\right) = \sum_{K=-p}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}, \; b_{-p} = 1$$

meromorficznych i p-listnych dla $\zeta \in K' = \{\zeta: |\zeta|>1\}$.

$\bar{S}_p$ - niech będzie klasą funkcji postaci (I) spełniających warunek A

$\bar{\Sigma}_p$ - niech jest klasą funkcji postaci (II) i spełniających warunek A.

$\tilde{\Sigma}_p$ - niech jest klasą funkcji mających rozwinięcie (II) i spełniających warunek B.

Nierówność G.M. Gołuzina [3]

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\Theta})|^{\lambda} d\Theta \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad F \in \Sigma_p, \quad \lambda \geqslant 0,$$

ma swój analogon w klasie funkcji polowo średnio p-listnych. Otóż I.E. Alenicyn [1] wykazał, że

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\Theta})|^{\lambda} d\Theta \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad r > 1 \quad \text{i} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 2,$$

gdy $F \in \bar{\Sigma}_p$ oraz $\lambda \geqslant 2$, gdy $F \in \tilde{\Sigma}_p$.

Z dotychczasowych rezultatów związanych ze współczynnikami funkcji w klasach $S_p, \sum_p \bar{S}_p, \sum_p$ znane są oszacowania $|a_{p+1}| \leqslant 2p$, [3], $|a_{p+2}| \leqslant p(2p+1)$ [4] $|a_{p+3}| \leqslant \frac{2}{3}p(p+1)$ [5], gdy $f \in S_p$, $|a_{p+1}| \leqslant 2p$ [6], gdy $f \in \bar{S}_p$, $|b_{-p+1}| \leqslant 2p$, $|b_{-p+2}| \leqslant p(2p-1)$, gdy $F \in \sum_p$ [1].

Dla współczynników funkcji p-listnych znane są również następujące oszacowania podane przez G.M. Gołuzina [3].

Jeżeli $b_{-p+1} = b_{-p+2} \ldots = b_{-p+k} = 0$, to dla $n = k+1, k+2, \ldots, 2k+1$, $(k \geqslant 1)$, $|b_n| \leqslant \frac{2p}{n}$, gdy $F \in \sum_p$ oraz jeżeli $a_{p+1} = p_{+2} = \ldots a_{p+k} = 0$, to dla $n = k+1, k+2, \ldots 2k+1$, $|a_{p+n}| \leqslant \frac{2p}{n}$, gdy $f \in S_p$.

Można zauważyć, że oszacowania te z uwagi na nierówność (III) łatwo dadzą się przenieść na funkcje polowo średnio p-listne.
Ponieważ w literaturze nie znalazłem dotąd sformułowania takich twierdzeń dla funkcji polowo średnio p-listnych, wydaje się celowym to uczynić. Tak więc

<u>Twierdzenie 1</u>. Jeżeli funkcja $F(\zeta) \in \overline{\sum}_p$ oraz

$$b_{-p+1} = b_{-p+2} = \ldots = b_{-p+k} = 0,$$

to dla $n = k+1, k+2, \ldots, 2k$ i $1 \leqslant k \leqslant p$

$$|b_{-p+n}| \leqslant \frac{2p}{n}. \tag{1}$$

Przy czym równość zachodzi tylko dla funkcji

$$F(\zeta) = \zeta^p\left(1 + \frac{\eta}{\zeta^n}\right)^{\frac{2p}{n}}, \quad |\eta| = 1.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcja $F(\zeta) \in \tilde{\Sigma}_p$ oraz $b_{-p+1} = b_{-p+2} = \ldots = b_{-p+k} = 0$, to dla $n = k+1, k+2, \ldots, 2k+1$, i $k \geqslant 2p$

$$|b_{-p+n}| \leqslant \frac{2p}{n}, \tag{2}$$

z równością tylko dla funkcji

$$F(\zeta) = \zeta^p\left(1 + \frac{\eta}{\zeta^n}\right)^{\frac{2p}{n}}, \quad |\eta| = 1.$$

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $f(z) \in \bar{S}_p$ oraz $a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_{p+k} = 0$, to dla $n=k, k+1, \ldots, 2k-1$ i $k \geqslant 2p$

$$|a_{p+n}| \leqslant \frac{2p}{n} \tag{3}$$

z równością tylko dla funkcji

$$f(z) = \frac{z^p}{(1 + \eta z^n)^{\frac{2p}{n}}}, \quad |\eta| = 1.$$

Twierdzenie 4. Jeżeli $F(\zeta) \in \tilde{\Sigma}_p$ i posiada rozwinięcie

$$F(\zeta) = \zeta^p\left(1 + \frac{b_p}{\zeta^{2p}} + \frac{b_{p+1}}{\zeta^{2p+1}} + \frac{b_{p+2}}{\zeta^{2p+2}} + \ldots\right)$$

to

1°. $$|b_n| \leqslant \frac{2p}{n+p}, \text{ dla } n=p, p+1, \ldots, 3p-1$$

z równością tylko dla funkcji

$$F(\zeta) = \zeta^p\left(1 + \frac{\eta}{\zeta^{n+p}}\right)^{\frac{2p}{n+p}}, \quad |\eta| = 1,$$

2°. $$|b_n| \leqslant \frac{-\sqrt{p(n-2p)} + \sqrt{p(n-2p) + np\left(\sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}} + 1\right)}}{n}$$

dla $n \geqslant 3p$.

Dowód. Nierówność 1° otrzymuje się bezpośrednio z twierdzenia II wstawiając do nierówności (2) $n+p$ w miejsce n. Aby wykazać nierówność 2°, weźmy pod uwagę następujące nierówności

$$p|b_p|^2 + (p+1)|b_{p+1}|^2 + \ldots = \sum_{n=p}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant p \tag{4}$$

$$|2b_{p+1}|^2 + 2|2b_{p+2}|^2 + \ldots + (2p-1)|2b_{3p-1}|^2 + 2p|2b_{3p} + b_2^2|^2 +$$

$$+ (2p+1)|2b_{3p+1} + 2b_p b_{p+1}|^2 + \ldots \leqslant 2p. \tag{5}$$

Nierówności (4) i (5) otrzymujemy z przyjmując kolejno $\lambda = 2$ $\lambda = 4$.

Rozważmy następnie nierówności

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \left[(p+k)|b_{p+k}|^2 + (p+m-k)|b_{p+m-k}|^2\right] +$$

$$+ \frac{1-(-1)^{m+1}}{2}\left(p + \left[\frac{m}{2}\right]\right)\left|b_p + \left[\frac{m}{2}\right]\right|^2 + (3_{p+m})|b_{3p+m}|^2 \leqslant p \tag{6}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} 2b_{p+k}\, b_{p+m-k} + \frac{1-(-1)^{m+1}}{2}\, b^2_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} + 2\, b_{3p+m}\right|^2 \leqslant \frac{2p}{2p+m} \tag{7}$$

otrzymane z (4) i (5) przez pominięcie po lewych stronach obu nierówności pewnej nieujemnej sumy składników.

Połóżmy

$$\tilde{b}_{p+k} = \sqrt{2}\, b_{p+k}, \quad \tilde{b}_{p+m-k} = \sqrt{2}\, b_{p+m-k}, \quad k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m-1}{2}\right],$$

$$b_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} = b_{p+\left[\frac{m}{2}\right]},$$

gdy m parzyste, wówczas nierówności (6) i (7) przyjmą postać.

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2}\left[(p+k)\left|\tilde{b}_{p+k}\right|^2 + (p+m-k)\left|\tilde{b}_{p+m-k}\right|^2\right] + (3p+m)\left|b_{3p+m}\right|^2 \leqslant p \tag{8}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\, \tilde{b}_{p+m-k} + 2\, b_{3p+m}\right|^2 \leqslant \frac{2p}{2p+m}. \tag{9}$$

Oznaczmy przez Ω zbiór punktów $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1},\ldots,\tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m})$ spełniających nierówności (8) i (9).

W zbiorze Ω będziemy szukać kresu górnego modułu współczynnika b_{3p+m}.

Zauważmy, że kres ten jest osiągnięty w zbiorze Ω, ponieważ zbiór ten jest ograniczony i domknięty.

Lemat 1

$$\max_{\Omega} |b_{3p+m}| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}}.$$

Dowód. Nie pomniejszając ogólności możemy przyjąć, że współczynnik b_{3p+m} jest rzeczywisty ujemny. Istotnie, gdyby

$$b_{3p+m} = |b_{3p+m}|\, e^{i\vartheta_{3p+m}}, \quad \vartheta_{3p+m} \neq (2k+1)\pi, \ k \text{ - całkowite}$$

to wtedy można by zastąpić badanie modułów współczynników funkcji $F(\zeta)$ badaniem modułów współczynników funkcji

$$\Phi(\zeta) = e^{-i\varphi} F(\zeta e^{i\varphi}), \quad \varphi = \frac{\vartheta_{3p+m}-\pi}{3p+m+1},$$

gdyż moduły współczynników tej funkcji są równe modułom współczynników funkcji $F(\zeta)$, przy czym współczynnik $3p+m$-ty funkcji $\Phi(\zeta)$ jest ujemny.

Połóżmy

$$b^*_{3p+m} = -\max_{\Omega} |b_{3p+m}|.$$

Gdybyśmy teraz przyjęli $\tilde{b}_p = \tilde{b}_{p+1} = \ldots = \tilde{b}_{p+m} = 0$, to w myśl (9)

$$|b^*_{3p+m}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}},$$

jednakże wówczas nierówność (8) byłaby ostra.

Przyjmując więc $\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}$ rzeczywiste dostatecznie małe i takie aby

$$H = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\, \tilde{b}_{p+m-k} > 0$$

otrzymamy pewne

$$b_{3p+m} < -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}},$$

więc

$$\max_{\Omega}\left|b_{3p+m}\right| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}}$$

czyli

$$\left|b^{*}_{3p+m}\right| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}}.$$

Oznaczmy przez Ω_1 zbiór tych punktów $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \in \Omega$, dla których $b_{3p+m} = b^{*}_{3p+m}$. Oczywiście $\Omega_1 \subset \Omega$.

<u>Lemat 2</u>. Jeżeli $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \in \Omega_1$, to

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2}\left[(p+k)\left|\tilde{b}_{p+k}\right|^2 + (p+m-k)\left|\tilde{b}_{p+m-k}\right|^2\right] + 3_{p+m}\left|b^{*}_{3p+m}\right|^2 = p \tag{10}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\,\tilde{b}_{p+m-k} + 2\,b^{*}_{3p+m}\right|^2 = \frac{2p}{2p+m}. \tag{11}$$

Dowód. Rozpatrzmy trzy przypadki

1° Przypuśćmy, że dla pewnego $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \in \Omega_1$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2}\left[(p+k)\left|\tilde{b}_{p+k}\right|^2 + (p+m-k)\left|\tilde{b}_{p+m-k}\right|^2\right] + (3p+m)\left|b^*_{3p+m}\right|^2 < p \qquad (10')$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\,\tilde{b}_{p+m-k} + 2b_{3p+m}\right|^2 < \frac{2p}{2p+m}, \qquad (11')$$

wówczas można by powiększyć $\left|b^*_{3p+m}\right|$ nie zmieniając pozostałych współczynników i zachować ostre nierówności (10') i (11'), co przeczy temu, że $\left|b^*_{3p+m}\right|$ jest maksymalny.

2° Przypuśćmy z kolei, że dla pewnego $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m} \in \Omega_1$.

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2}\left[(p+k)\left|b_{p+k}\right|^2 + (p+m-k)\left|b_{p+m-k}\right|^2\right] + (3p+m)\left|b^*_{3p+m}\right|^2 = p \qquad (10'')$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\,\tilde{b}_{p+m-k} + 2\,b_{3p+m}\right|^2 < \frac{2p}{2p+m}. \qquad (11'')$$

Zauważmy, że przypadek $\tilde{b}_p = \tilde{b}_{p+1} = \ldots = \tilde{b}_{p+m} = 0$ wobec lematu 1 nie może zachodzić. Wówczas wobec ciągłości lewej strony (11") można tak zmniejszyć $\left|\tilde{b}_p\right|, \left|\tilde{b}_{p+1}\right|, \ldots, \left|\tilde{b}_{p+m}\right|$ i powiększyć $\left|b^*_{3p+m}\right|$, żeby ostra nierówność (11") oraz równość (10") zostały zachowane, co wobec maksymalności $\left|b^*_{3p+m}\right|$ jest niemożliwe.

3° Przypuśćmy teraz, że dla pewnego $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \in \Omega_1$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2}\left[(p+k)\left|\tilde{b}_{p+k}\right|^2 + (p+m-k)\left|\tilde{b}_{p+m-k}\right|^2\right] + (3p+m)\left|b^*_{3p+m}\right|^2 < p \cdot \qquad (10''')$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\, \tilde{b}_{p+m-k} + 2\, b_{3p+m}\right]^2 = \frac{2p}{2p+m} \cdot \qquad (11''')$$

Można tak zmienić argumenty liczb $\tilde{b}_{p+k}, \tilde{b}_{p+m-k}$, $k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right]$, nie zmieniając jednocześnie ich modułów, żeby suma

$$H = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\, \tilde{b}_{p+m-k} = Re^{i\alpha}, \quad R > 0$$

przybrała dowolny argument i zachowała swój moduł. Przypuśćmy, że $\alpha \neq 2\,l\pi$, $l = 0, \pm 1, \ldots$, wówczas zmieniając α i nie zmieniając b^*_{3p+m} można by zmniejszyć lewą stronę (11''') i otrzymać przypadek 1° co jest niemożliwe. Zatem $\alpha = 2l\pi$ i tym samym $H > 0$.

Jeżeli teraz powiększymy $|\tilde{b}_p|, |\tilde{b}_{p+1}|, \ldots, |\tilde{b}_{p+m}|$ do liczb $|b^{\circ}_p|$, $|b^{\circ}_{p+1}|, \ldots, |b^{\circ}_{p+m}|$, tak, aby

$$\frac{|b^{\circ}_p|}{|\tilde{b}_p|} = \frac{|b^{\circ}_{p+1}|}{|\tilde{b}_{p+1}|} = \ldots = \frac{|b^{\circ}_{p+m}|}{|\tilde{b}_{p+m}|} = C > 1,$$

to wówczas suma H pozostanie dodatnia i zostanie powiększona. Więc na to, aby zachodziła równość (11''') moduł b^*_{3p+m} musiał by być powiększony wbrew temu, że jest on maksymalny. Zauważmy ponadto, że dla C dostatecznie bliskich 1 nierówność (10''') zostanie zachowana. Wykluczyliśmy więc również przypadek 3°.

Lemat 3. Jeżeli $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \in \Omega_1$, to iloczyny

$$\tilde{b}_{p+k}\, \tilde{b}_{p+m-k}, \quad k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right], \tag{12}$$

są nieujemne.

Dowód. Z dowodu lematu 2 wynika, że

$$H = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \tilde{b}_{p+k}\, \tilde{b}_{p+m-k} > 0,$$

wobec tego, istnieje składnik $\tilde{b}_{p+k_0}\, \tilde{b}_{p+m-k_0}$ sumy H taki, że

$$\mathrm{Re}\,(\tilde{b}_{p+k_0}\, \tilde{b}_{p+m-k_0}) \neq 0.$$

Połóżmy

$$\tilde{b}_{p+k} = \varrho_{p+k}\, e^{i\vartheta_{p+k}}, \quad \tilde{b}_{p+m-k} = \varrho_{p+m-k}\, e^{i\vartheta_{p+m-k}}$$

$$\vartheta_{p+k} + \vartheta_{p+m-k} = \varphi_{p+k}, \quad k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right].$$

Wykażmy najpierw, że iloczyny (12) są rzeczywiste. Jeżeli dla każdego $k \neq k_0$ $\varrho_{p+k}\, \varrho_{p+m-k} = 0$, to lemat jest udowodniony. Przypuśćmy, że dla pewnego $k \neq k_0$ $\varrho_{p+k}\, \varrho_{p+m-k} > 0$ i weźmy pod uwagę wyrażenie $\mathrm{Im}(\tilde{b}_{p+k}\, \tilde{b}_{p+m-k}) + \mathrm{Im}(\tilde{b}_{p+k_0}\, \tilde{b}_{p+m-k_0})$

$$\varrho_{p+k}\, \varrho_{p+m-k} \sin \varphi_{p+k} + \varrho_{p+k_0}\, \varrho_{p+m-k_0} \sin \varphi_{p+k_0} + C_1. \tag{13}$$

Oznaczmy przez $f(\varphi_{p+k}, \varphi_{p+k_o})$ wyrażenie $\mathrm{Re}(\tilde{b}_{p+k}\,\tilde{b}_{p+m-k}) + \mathrm{Re}(\tilde{b}_{p+k_o}\,\tilde{b}_{p+m-k_o})$,

$$f(\varphi_{p+k}, \varphi_{p+k_o}) = \varrho_{p+k}\,\varrho_{p+m-k}\cos\varphi_{p+k} + \varrho_{p+k_o}\,\varrho_{p+m-k_o}\cos\varphi_{p+k_o}. \tag{14}$$

Przyjmując (13) ze stałą C_1 jako warunek uboczny możemy traktować $f(\varphi_{p+k}, \varphi_{p+k_o})$ jako funkcję tylko zmiennej φ_{p+k}.

Rozpatrzmy dwa przypadki

1. $$\frac{df(\varphi_{p+k}, \varphi_{p+k_o})}{d\varphi_{p+k}} \neq 0,$$

wówczas zachowując warunek (13), jak również i rzeczywistość sumy H, można przez odpowiednią zmianę wartości φ_{p+k} i φ_{p+k_o} zwiększyć (14) a tym samym zwiększyć i sumę H. Możemy więc przez odpowiednią zmianę wartości φ_{p+k} i φ_{p+k_o} zwiększyć sumę H, a następnie przywrócić jej dawną wartość przez odpowiednie zmniejszenie modułów $\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}$. Wówczas równość (11) zostanie zachowana, natomiast równość (10) przejdzie na ostrą nierówność, co wobec lematu 2 jest niemożliwe. Przypadek 1 nie może więc zachodzić.

2. Niech teraz

$$\frac{df(\varphi_{p+k}, \varphi_{p+k_o})}{d\varphi_{p+k}} = 0,$$

wówczas z (14)

$$\frac{df(\varphi_{p+k}, \varphi_{p+k_o})}{d\varphi_{p+k}} = \varrho_{p+k}\,\varrho_{p+m-k}\sin\varphi_{p+k} -$$

$$-\varrho_{p+k_o}\,\varrho_{p+m-k_o}\,\sin\varphi_{p+k_o}\,\frac{d\varphi_{p+k_o}}{d\varphi_{p+k}} = 0,$$

zaś wobec (13)

$$\frac{d\varphi_{p+k_o}}{d\varphi_{p+k}} = -\frac{\varrho_{p+k}\,\varrho_{p+m-k}\,\cos\varphi_{p+k}}{\varrho_{p+k_o}\,\varrho_{p+m-k_o}\,\cos\varphi_{p+k_o}},$$

więc

$$\frac{df(\varphi_{p+k},\varphi_{p+k_o})}{d\,\varphi_{p+k}} = -\varrho_{p+k}\,\varrho_{p+m-k}(\sin\varphi_{p+k} - \cos\varphi_{p+k}\,\mathrm{tg}\varphi_{p+k_o}) = 0,$$

skąd

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{p+k} = \mathrm{tg}\,\varphi_{p+k_o}$$

$$\varphi_{p+k} = \varphi_{p+k_o} + l_k\pi\,,\quad l_k = 0,\ \pm 1,\ldots.$$

Suma H da się więc zapisać w postaci

$$H = e^{i\varphi_{p+k_o}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \varrho_{p+k}\,\varrho_{p+m-k}\,e^{il_k\pi},\quad l_{k_o} = 0.$$

Ponieważ suma H jest rzeczywista, więc

$$\varphi_{p+k_o} = S\pi\,,$$

gdzie S jest liczbą całkowitą, a stąd i wobec (15) $\varphi_{p+k} = (S+l_k)\pi$ z czego wynika, że iloczyny (12) są rzeczywiste.

Wykażemy teraz, że są one nieujemne.

Przypuśćmy, że istnieje takie j_o, dla którego

$$\tilde{b}_{p+j_o}\,\tilde{b}_{p+m-j_o} < 0. \tag{16}$$

Wówczas, wobec $H > 0$, musiałoby także istnieć takie j_1, że

$$\tilde{b}_{p+j_1}\,\tilde{b}_{p+m-j_i} > 0. \tag{17}$$

Połóżmy następnie

$$\tilde{b}_{p+j_o}\,\tilde{b}_{p+m-j_c} + \tilde{b}_{p+j_1}\,\tilde{b}_{p+m-j_1} = d, \quad d \text{ - stała}, \tag{18}$$

wtedy wobec (16) i (17) można by tak zmniejszyć $|\tilde{b}_{p+j_o}|$, $|\tilde{b}_{p+m-j_o}|$, $|\tilde{b}_{p+j_1}|$, $|\tilde{b}_{p+m-j_1}|$, aby warunek (18) był zachowany.
Wówczas równość (11) będzie spełniona, natomiast równość (10) przejdzie na ostrą nierówność, co przeczy lematowi 2.

<u>Lemat 4</u>. W zbiorze Ω_1 istnieją takie punkty $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b^*_{3p+m})$, dla których

$$\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m} \text{ są nieujemne.} \tag{19}$$

<u>Dowód</u>. Wystarczy, jeżeli przyjmiemy

$$\tilde{b}_{p+k} = |\tilde{b}_{p+k}|, \quad \tilde{b}_{p+m-k} = |\tilde{b}_{p+m-k}|, \quad k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right],$$

ponieważ wtedy iloczyny (12) pozostaną nieujemne i jednocześnie równości (10) i (11) zostaną zachowane.

Okazuje się więc, że przy szukaniu kresu górnego modułu współczynnika b_{3p+m} wystarczy brać pod uwagę tylko te punkty $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \in \Omega$, dla których $\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}$, są nieujemne oraz

$b_{3p+m} < 0$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich punktów przez Ω_2. Oczywiście $\Omega_2 \subset \Omega$ oraz zbiór $\Omega_1 \cap \Omega_2$ nie jest pusty.

<u>Lemat 5</u>. Jeżeli $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m})$ $\Omega_1 \cap \Omega_2$, to

$$\tilde{b}_{p+1} = \tilde{b}_{p+2} = \ldots = \tilde{b}_{p+m-1} = 0.$$

<u>Dowód</u>. Zauważmy, że jeżeli $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \in \Omega_2$, to do zbioru Ω_2 należy również taki punkt $(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+k-1}, \tilde{b}^*_{p+k}, \tilde{b}_{p+k+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m-k-1}, \tilde{b}^*_{p+m-k}, \tilde{b}_{p+m-k+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m})$, $k=0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right]$, dla którego

$$\tilde{b}^*_{p+k}\,\tilde{b}^*_{p+m-k} = \tilde{b}_{p+k}\,\tilde{b}_{p+m-k}$$

i

$$(p+k)\tilde{b}^{*2}_{p+k} + (p+m-k)\tilde{b}^{*2}_{p+m-k} \leqslant (p+k)\tilde{b}^2_{p+k} + (p+m-k)\tilde{b}^2_{p+m-k}.$$

Wynika stąd, że przy ustalonych

$$\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+k-1}, \tilde{b}_{p+k+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m-k-1}, \tilde{b}_{p+m-k+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+m},$$

punkt

$$(\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1}, \ldots, \tilde{b}_{p+k}, \ldots, \tilde{b}_{p+m-k}, \ldots, \tilde{b}_{p+m}, b_{3p+m}) \qquad k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right],$$

dla którego

$$\tilde{b}_{p+k}\,\tilde{b}_{p+m-k} = C_1, \quad C_1 \text{ - stała}$$

oraz

$$(p+k)\tilde{b}^2_{p+k} + (p+m-k)\tilde{b}^2_{p+m-k} \tag{21}$$

jest najmniejsze, też należy do Ω_2. Wyznaczamy więc minimum wyrażenia (21) przy warunku (20).

Oznaczając

$$g_1(\tilde{b}_{p+k}, \tilde{b}_{p+m-k}) = (p+k)\tilde{b}^2_{p+k} + (p+m-k)\tilde{b}^2_{p+m-k} + \mu(\tilde{b}_{p+k}\,\tilde{b}_{p+m-k} - C_1),$$

mamy

$$\frac{\delta g_1(\tilde{b}_{p+k}, \tilde{b}_{p+m-k})}{\delta \tilde{b}_{p+k}} = 2(p+k)\tilde{b}_{p+k} + \mu\tilde{b}_{p+m-k} = 0$$

$$\frac{\delta g_1(\tilde{b}_{p+k}, \tilde{b}_{p+m-k})}{\delta \tilde{b}_{p+m-k}} = 2(p+m-k)\tilde{b}_{p+m-k} + \mu\tilde{b}_{p+k} = 0,$$

skąd

$$\tilde{b}_{p+m-k} = -\frac{\mu\tilde{b}_{p+k}}{2(p+m-k)} \tag{22}$$

$$\tilde{b}_{p+k}\left[2(p+k) - \frac{\mu^2}{2(p+m-k)}\right] = 0. \tag{23}$$

Jeżeli $\tilde{b}_{p+k} \neq 0$, to wobec (23) $\mu^2 = 4(p+k)(p+m-k)$ i w myśl (22)

$$\tilde{b}_{p+m-k} = \sqrt{\frac{p+k}{p+m-k}}\,\tilde{b}_{p+k}. \tag{24}$$

Gdy $\tilde{b}_{p+k} = 0$, wówczas wobec (22) $\tilde{b}_{p+m-k} = 0$ i związek (24) również zachodzi. Podstawiając teraz do lewych stron nierówności (8) i (9) w miejsce $\tilde{b}_{p+m-k}$ prawą stronę (24) otrzymamy

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (p+k)\tilde{b}^2_{p+k} + (3p+m)b^2_{3p+m} \leqslant p \tag{25}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sqrt{\frac{p+k}{p+m-k}}\,\tilde{b}^2_{p+k} + 2\,b_{3p+m}\right|^2 \leqslant \frac{2p}{2p+m}. \tag{26}$$

Wybierzmy teraz spośród wartości $k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right]$, dowolne dwie, np. i,j, gdzie $i < j$. Zauważmy dalej, że jeśli nierówności (25) i (26) zachodzą dla pewnych $\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1},\ldots,\tilde{b}_{p+\left[\frac{m}{2}\right]}, b_{3p+m}$, to zachodzą także dla takich $\tilde{b}_p, \tilde{b}_{p+1},\ldots,\tilde{b}_{p+i-1}, \tilde{b}^*_{p+i}, \tilde{b}_{p+i+1},\ldots, \tilde{b}_{p+j-1}, \tilde{b}^*_{p+j}, \tilde{b}_{p+j+1},\ldots,\tilde{b}_{p+\left[\frac{m}{2}\right]}, b_{3p+m}$, dla których

$$\sqrt{\frac{p+i}{p+m-i}}\,\tilde{b}^{*2}_{p+i} + \sqrt{\frac{p+j}{p+m-j}}\,\tilde{b}^{*2}_{p+j} = \sqrt{\frac{p+i}{p+m-i}}\,\tilde{b}^2_{p+i} + \sqrt{\frac{p+j}{p+m-j}}\,\tilde{b}^2_{p+j}$$

$$(p+i)\tilde{b}^{*2}_{p+i} + (p+j)\tilde{b}^{*2}_{p+j} \leqslant (p+i)\tilde{b}^2_{p+i} + (p+j)\tilde{b}^2_{p+j}.$$

Wnioskujemy stąd, że nierówności (25) i (26) będą także zachodziły wtenczas, gdy przy warunku

$$\sqrt{\frac{p+i}{p+m-i}}\,\tilde{b}^2_{p+i} + \sqrt{\frac{p+j}{p+m-j}}\,\tilde{b}^2_{p+j} = C_2, \quad C_2 \text{ - stała}$$

wyrażenie

$$(p+i)\tilde{b}^2_{p+i} + (p+j)\tilde{b}^2_{p+j} \tag{28}$$

przyjmie najmniejszą wartość. Szukamy więc minimum wyrażenia (28) pod warunkiem (27).

Połóżmy

$$g_2(\tilde{b}_{p+i},\tilde{b}_{p+j}) = (p+i)\tilde{b}^2_{p+i} + (p+j)\tilde{b}^2_{p+j} +$$

$$+\nu\sqrt{\frac{p+i}{p+m-i}}\,\tilde{b}^2_{p+i} + \sqrt{\frac{p+j}{p+m-j}}\,\tilde{b}^2_{p+j} - c_2),$$

wówczas

$$\frac{\delta g_2(\tilde{b}_{p+i},\tilde{b}_{p+j})}{\delta\tilde{b}_{p+i}} = 2\,\tilde{b}_{p+i}(p+i+\nu\sqrt{\frac{p+i}{p+m-i}}) = 0$$

$$\frac{\delta g_2(\tilde{b}_{p+i},\tilde{b}_{p+j})}{\delta b_{p+j}} = 2\,\tilde{b}_{p+j}(p+j+\nu\sqrt{\frac{p+j}{p+m-j}}) = 0,$$

gdyby $\tilde{b}_{p+i} \neq 0$ i $\tilde{b}_{p+j} \neq 0$, to wobec (29)

$$(i-j)\left[m-(i+j)\right] = 0. \tag{30}$$

Ponieważ $i \neq j$ oraz $i+j<m$, zatem warunek (30) zachodzić nie może. Wnioskujemy stąd, że co najwyżej jeden ze współczynników $\tilde{b}_{p+k}$, $k = 0,1,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right]$, jest różny od zera.

Wykażemy, że będzie nim współczynnik $\tilde{b}_p$, gdy $b_{3p+m} = b^*_{3p+m}$, tj. gdy odpowiedni punkt należy do $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Istotnie, wobec (25) i (26)

$$(p+k)\tilde{b}^2_{p+k} + (3p+m)b^2_{3p+m} < p$$

$$\left|\sqrt{\frac{p+k}{p+m-k}}\,b^2_{p+k} + 2\,b_{3p+m}\right| \leq \sqrt{\frac{2p}{2p+m}},$$

a stąd

$$(p+k)\left|\tilde{b}_{p+k}\right|^2 + (3p+m)\left|b_{3p+m}\right|^2 \leqslant p \tag{31}$$

$$2\left|b_{3p+m}\right| - \sqrt{\frac{p+k}{p+m-k}}\left|\tilde{b}_{p+k}\right|^2 \leqslant \sqrt{\frac{2p}{2p+m}}. \tag{32}$$

Mnożąc teraz obie strony (32) przez $\sqrt{(p+k)\ (p+m-k)}$, a następnie dodając do (31) otrzymamy

$$(3p+m)\left|b_{3p+m}\right|^2 + 2\sqrt{(p+k)(p+m-k)}\left|b_{3p+m}\right| \leqslant \sqrt{\frac{2p}{2p+m}}\sqrt{(p+k)(p+m-k)} + p.$$

Zauważmy, że przy maksymalnym $\left|b_{3p+m}\right| = y(k)$, ostatnia nierówność przechodzi w równość

$$(3p+m)y^2(k) + 2\sqrt{(p+k)(p+m-k)}\,y(k) - \sqrt{\frac{2p}{2p+m}}\sqrt{(p+k)(p+m-k)} - p = 0. \tag{33}$$

Ponieważ

$$\frac{dy(k)}{dk} = -\frac{\dfrac{m-2k}{\sqrt{(p+k)(p+m-k)}}\left(y(k) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}}\right)}{2(3p+m)y(k) + 2\sqrt{(p+k)(p+m-k)}} \leqslant 0$$

dla

$$y(k) > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}} \quad \text{i} \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{m}{2}\right],$$

zaś wobec lematu 1 $\left|b^*_{3p+m}\right| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{2p+m}}$, zatem $\left|b^*_{3p+m}\right|$ spełnia równanie (33) dla $k = 0$, a więc $\tilde{b}_{p+1} = \tilde{b}_{p+2} = \ldots = \tilde{b}_{p+m-1} = 0$. Lemat 5 jest więc wykazany.

Na mocy dowodu lematu 5, dla $|b^*_{3p+m}|$ mamy więc równanie

$$(3p+m)|b^*_{3p+m}|^2 + 2\sqrt{p(p+m)}\,|b^*_{3p+m}| - \sqrt{\frac{2p}{2p+m}}\sqrt{p(p+m)} - p = 0,$$

z którego otrzymujemy następujące oszacowanie współczynnika b_{3p+m}

$$|b_{3p+m}| \leqslant \frac{-\sqrt{p(p+m)} + \sqrt{p(p+m) + p(3p+m)\left(\sqrt{\frac{2(p+m)}{2p+m}} + 1\right)}}{3p+m}$$

kładąc $n = 3p+m$, $m = 0,1,2,\ldots$ otrzymujemy

$$|b_n| \leqslant \frac{-\sqrt{p(n-2p)} + \sqrt{p(n-2p) + np\left(\sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}} + 1\right)}}{n}, \quad n \geqslant 3p,$$

a więc nierówność 2° twierdzenia IV.

<u>Wniosek 1</u>. Jeżeli funkcja $F(\zeta)$ postaci

$$F(\zeta) = \zeta^p + \frac{b_p}{\zeta^p} + \frac{b_{2p}}{\zeta^{2p}} + \ldots + \frac{b_{np}}{\zeta^{np}} + \ldots$$

należy do $\sum^2_p$, to

$$|b_{np}| \leqslant \frac{-\sqrt{n-2} + \sqrt{n-2+n\left(\sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} + 1\right)}}{n} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3.$$

<u>Wniosek 2</u>. Jeżeli funkcja $F(\zeta)$ postaci

$$F(\zeta) = \zeta^p\left(1 + \frac{b_p}{\zeta^{2p}} + \frac{b_{p+1}}{\zeta^{2p+1}} + \frac{b_{p+2}}{\zeta^{2p+2}} + \ldots\right)$$

należy do $\tilde{\Sigma}_p$, to dla $n \geqslant 3p$

$$|b_n| \leqslant C\, p^{\frac{1}{2}}\, n^{-\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$C_1 \leqslant C \leqslant C_2, \quad C_1 = -1 + \sqrt{2+\sqrt{2}} \sim 0{,}848, \quad C_2 = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3} \sim 0{,}95.$$

Wykażemy najpierw, że $\frac{\sqrt{2}}{2} < C < 1$. W tym celu wystarczy dowieść, że

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < -\sqrt{\frac{n-2p}{n}} + \sqrt{\frac{n-2p}{2} + 1 + \sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}}} < 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 3p.$$

Przypuśćmy, że dla $n \geqslant 3p$

$$-\sqrt{\frac{n-2p}{n}} + \sqrt{\frac{n-2p}{n} + 1 + \sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}}} \geqslant 1. \tag{34}$$

Nierówność (34) jest równoważna kolejno nierównościom

$$\sqrt{\frac{n-2p}{n} + 1 + \sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}}} \geqslant 1 + \sqrt{\frac{n-2p}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}} \geqslant 2\sqrt{\frac{n-2p}{n}},$$

a stąd otrzymujemy, że $n-2p \leqslant 0$ dla $n \geqslant 3p$, co być nie może.

Przypuśćmy z kolei, że

$$-\sqrt{\frac{n-2p}{n}} + \sqrt{\frac{n-2p}{n} + 1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wówczas

$$\sqrt{\frac{n-2p}{n} + 1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{n-2p}{n}},$$

czyli

$$1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}} \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{n-2p}{n}},$$

a stąd

$$\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}} - \sqrt{\frac{n-2p}{n}} < -\frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{35}$$

Zważywszy, że

$$\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}} - \sqrt{\frac{n-2p}{n}} \geqslant \min_{n \geqslant 3p}\left(\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}} - \sqrt{\frac{n-2p}{n}}\right) > \min_{n \geqslant 3p}\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}} - \max_{n \geqslant 3p}\sqrt{\frac{n-2p}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1,$$

to wobec (35) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < -\frac{\sqrt{2}}{4}$, czyli $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$, a to jest nieprawdą.

Oznaczmy

$$x = -\sqrt{\frac{n-2p}{n}} + \sqrt{\frac{n-2p}{n} + 1 + \sqrt{2}\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}}}$$

i zauważmy, że x jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$x^2 + 2\sqrt{\frac{n-2p}{n}}\,x - 1 - \sqrt{2}\sqrt{\frac{n-2p}{n-p}} = 0.$$

Wykażemy teraz, że x maleje ze wzrostem n.

Istotnie, wystarczy nam dowieść, że funkcja

$$u(n,x) = \frac{dx}{dn} = \frac{\dfrac{2p}{\sqrt{n\,n(n-2p)}}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{n}{n-p}\right)^{\frac{3}{2}} - x\right]}{2x+2\sqrt{\dfrac{n-2p}{n}}}$$

jest stale ujemna w obszarze

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1\\ n \geqslant 3p\end{array}\right\} \qquad (36)$$

$u(n,x) = 0$ dla $x_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{3}{2}}$, a ponieważ $n \geqslant 3p$, to $x_n \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zatem dla $n \geqslant 3p$ i $x > \frac{3\sqrt{3}}{8}$ $n(n,x) < 0$, a więc również na obszarze (36) $u(n,x) < 0$.

Tak więc

$$C_1 = \min_{n\geqslant 3p} x = -1 + \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad C_2 = \max_{n\geqslant 3p} x = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}.$$

LITERATURA

1. Alenicyn I.E.: O funkcjach p-listnych w sriedniem. Matem. Sb.20/62:1, 1947 113-124.
2. Alenicyn I.E.: O funkcijach p-listnych w sredniem. Matem. Sb.27/69: 2 1950 285-296.
3. Gołuzin G.M.: Über p-valente Funktionen Recueil Mathematique 8 1940 277-284.
4. Jenkins J.A.: Univalent funktions and conformal mapping. Springer - Verlag. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1958.
5. Pethe K.: Estimation du coefficient a_{p+3} de la fonection p-valente danes le unite. Bulletin De L ACADEMIE POLONAISE DES SCIENCES. Serie des sciences math. astr. et phys. Vol XX No 3 1972.
6. Spencer D.C.: On finitely mean walent function. II Traus. Amer Math. Soc. 48 1940 418-435.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУНКЦИЙ p-ЛИСТНЫХ ПО ПЛОЩАДИ

Р е з ю м е

В настоящей работе даётся оценка коэффициента b_n в классе $\tilde{\Sigma}_p$ функций $F(\zeta) = \zeta^p(1 + \frac{b_{-p+1}}{\zeta} + \frac{b_{-p+2}}{\zeta^2} + \dots)$ мероморфных в области $|\zeta|>1$. И p-листных в среднем.

Эта оценка имеет следующий вид

$$|b_n| \leqslant \frac{-\sqrt{p(n-2p)} + \sqrt{p(n-2p)+np\left(\sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}} + 1\right)}}{n}$$

для $n \geqslant 3p$.

S u m m a r y

In this paper the author gives an evaluation of the coefficients b_n in the class $\tilde{\Sigma}_p$ of a function, which are analytic and p-valent in $|\zeta|>1$. Their Laurent expansion amounts to

$$F(\zeta) = \zeta^p(1 + \frac{b_{-p+1}}{\zeta} + \frac{b_{-p+2}}{\zeta^2} + \dots).$$

The evaluation takes the following form

$$|b_n| \leqslant \frac{-\sqrt{p(n-2p)} + \sqrt{p(n-2p) + np\left(\sqrt{\frac{2(n-2p)}{n-p}} + 1\right)}}{n}, \quad n \geqslant 3p.$$