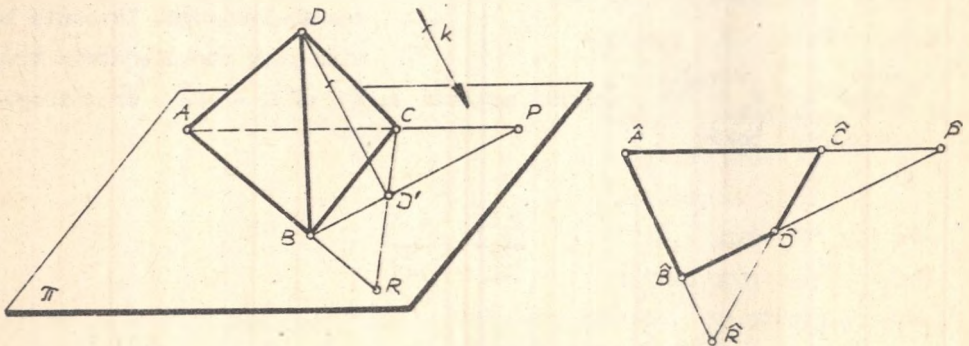


MARIAN PALEJ, ANNA BŁACH

O PEWNYM DOWODZIE TWIERDZENIA POHLKEGO

Streszczenie. W artykule przedstawiono nowy dowód twierdzenia Pohlkego dotyczącego aksonometrycznego rzutu ukośnego. Dowód przeprowadzono w oparciu o geometrię rzutową.

Niech dany będzie dowolny czworoscian $ABCD$ oraz dowolny czworokąt płaski $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$. Zgodnie z twierdzeniem Pohlkego istnieje taki kierunek k i taka rzutnia \mathcal{K} , że rzutem równoległym w kierunku k czworoscianu $ABCD$ na rzutnię \mathcal{K} jest figura podobna do czworokąta $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$.



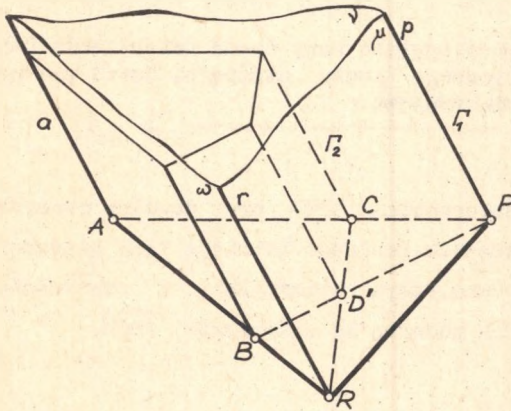
Rys. 1

W części wstępnej dowodu powyższego twierdzenia przeprowadzimy następujące rozumowanie. Wybierzmy w ten sposób kierunek rzutu k , aby rzut D' punktu D na płaszczyznę podstawy ABC utworzył czworokąt zupełny $ABCD'$, w którym stosunki podziału boków przez leżące na nich punkty przekątne były takie same jak w danym czworokącie $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$ (rys. 1).

Spełnijmy zatem następujące relacje:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{\hat{PA}}{\hat{PC}}; \quad \frac{RA}{RB} = \frac{\hat{RA}}{\hat{RB}}. \quad (1)$$

Rozważmy graniastosłup Γ_1 o podstawie APR i krawędziach równoległych do k oraz graniastosłup Γ_2 o podstawie ABCD' i krawędziach



Rys. 2

równoległych do k (rys. 2). Jest widoczne, że jeżeli uda się przeciąć graniastosłup Γ_1 pewną płaszczyzną ϕ w trójkącie $A_1P_1R_1$ podobnym do trójkąta \hat{APR} , to ta sama płaszczyzna przetnie graniastosłup Γ_2 w figurze podobnej do czworokąta \hat{ABCD} , czyli stanowić będzie rzutnię \mathcal{K} spełniającą dla kierunku k twierdzenie Pohlkego. Istotnie bowiem przy podobieństwie trójkątów $A_1P_1R_1 \sim \hat{APR}$ zachodzi równość kątów $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle \hat{A}$ oraz proporcjonalność boków

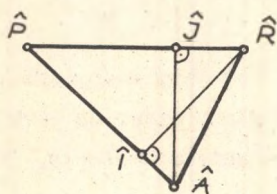
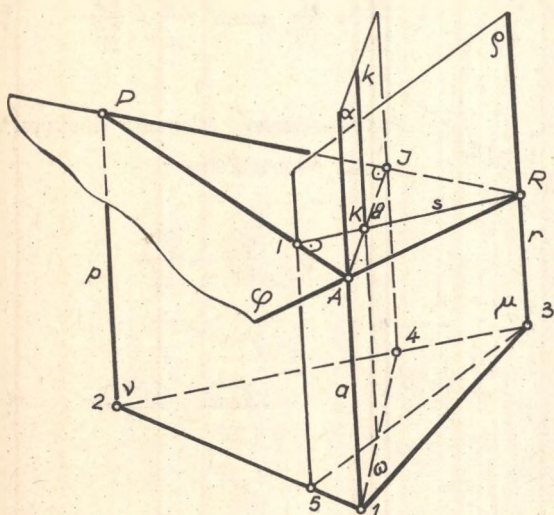
$$\frac{A_1C_1}{\hat{AC}} = \frac{A_1B_1}{\hat{AB}}$$

co zapewni podobieństwo trójkątów

$$\hat{\hat{ABC}} \sim A_1B_1C_1 \quad \text{oraz} \quad \hat{\hat{BCD}} \sim B_1C_1D_1.$$

Dowód twierdzenia Pohlkego sprowadza się więc do wykazania następującej własności: dowolny graniastosłup trójścienny można zawsze przeciąć w trójkątach podobnych do z góry założonego, dowolnego trójkąta $\hat{\hat{APR}}$.

Przyjmijmy dowolny graniastosłup Γ_1 , którego podstawą jest trójkąt 123 oraz dowolny trójkąt $\hat{\hat{A}}\hat{\hat{P}}\hat{\hat{R}}$ (rys. 3).



Rys. 3

Wprowadźmy płaszczyzny:

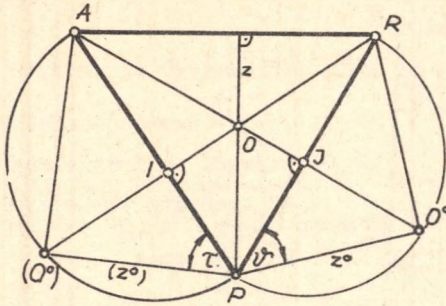
α - przechodzącą przez krawędź a i dzielącą bok 23 trójkąta 123 w stosunku $\frac{\hat{\hat{P}}\hat{\hat{J}}}{\hat{\hat{A}}\hat{\hat{I}}}$ oraz

q - przechodzącą przez krawędź r i dzielącą bok 12 trójkąta 123 w stosunku $\frac{\hat{\hat{A}}\hat{\hat{I}}}{\hat{\hat{A}}\hat{\hat{P}}}$.

Płaszczyzny α i q przecinają się w krawędzi k .

Wyberzmy dowolny punkt $K \in k$ i rozważmy płaszczyznę φ przechodzącą przez punkt K i przecinającą płaszczyzny α i q w takich prostych q i s że zachodzi $q \perp PR \perp s$ AP, gdzie PR jest odcinkiem prostej $\varphi \mu(pr)$,

a AP odcinkiem prostej $\varphi v(ap)$. Nietrudno dowieść, że płaszczyzna φ przecina graniastosłup Γ_1 w trójkącie podobnym do trójkąta $\hat{\hat{A}}\hat{\hat{P}}\hat{\hat{R}}$. Wystarczy w tym celu przeprowadzić następujące rozumowanie. Zgodnie z własnością płaszczyzn α i q boki PR i AP trójkąta APR dzielone są przez wysokości AJ i RI w takich stosunkach, w jakich wysokości $\hat{\hat{A}}\hat{\hat{J}}$ i $\hat{\hat{R}}\hat{\hat{I}}$ dzielą boki $\hat{\hat{P}}\hat{\hat{R}}$ i $\hat{\hat{A}}\hat{\hat{P}}$. Uważajmy trójkąty APR i $\hat{\hat{A}}\hat{\hat{P}}\hat{\hat{R}}$ jako trójkąty śladów aksonometrycznych, w których przez wierzchołki A, P, R i odpowiednio $\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{P}}, \hat{\hat{R}}$ przechodzą kolejno osie x, y, z (rys. 4).



Rys. 4

Wobec relacji:

$$\frac{AI}{IP} = \frac{\widehat{AI}}{\widehat{IP}} \quad \text{oraz} \quad \frac{PJ}{JR} = \frac{\widehat{PJ}}{\widehat{JR}} \quad (2)$$

stwierdzamy równość następujących stosunków:

$$\frac{O^oP}{JP} = \frac{\widehat{O^oP}}{\widehat{JP}}$$

i

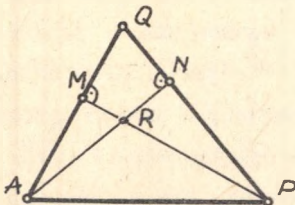
$$\frac{(O^o)P}{IP} = \frac{(\widehat{O^o})\widehat{P}}{\widehat{IP}} \quad (3)$$

a w ślad za tym kątów

$$\sphericalangle \phi = \sphericalangle \hat{\phi}; \quad \sphericalangle \tau = \sphericalangle \hat{\tau}.$$

Zauważmy jednak, że kąty ϕ i τ to kąty nachylenia osi z odpowiednio względem boków PR i AP. Ustalamy więc, że pary boków PR - \widehat{PR} i odpowiednio AP - \widehat{AP} zajmują położenia równoległe, wobec czego trójkąty APR i \widehat{APR} są podobne^{x)}.

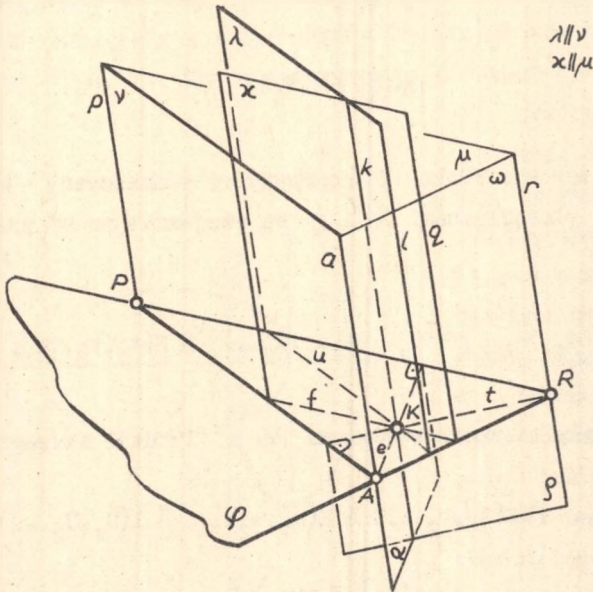
^{x)} W rozważaniach przyjęto, że trójkąt APR jako trójkąt śladów aksonometrycznych jest trójkątem ostrokątnym. Jeżeli z założeń zadania wynika inaczej analogiczne rozumowanie przeprowadzić można dla trójkątów APQ i \widehat{APQ} , (rys. 5), w których wierzchołek Q, \widehat{Q} jest punktem przecięcia się wysokości trójkątów odpowiednio APR i \widehat{APR} .



Rys. 5

Udowadniając jak wyżej, że trójkąty $APQ \sim \widehat{APQ}$ można na podstawie stałości stosunków podziału boków AQ, \widehat{AQ} i PQ, \widehat{PQ} punktami M, \widehat{M} i N, \widehat{N} wnieść o podobieństwie trójkątów APR i \widehat{APR} .

Zajmijmy się wyznaczeniem płaszczyzny φ . W tym celu rozważmy pomocnicze płaszczyzny χ i λ przechodzące przez krawędź k i odpowiednio równoległe do ścian graniastokłupa $\mu = pr$, $\nu = ap$. (rys. 6).



Rys. 6

Wyznamy krawędzie tych płaszczyzn z ścianą $\omega = ar$. Mamy odpowiednio:

$$\chi \cdot \omega = q$$

$$\lambda \cdot \omega = l.$$

Przez dowolny punkt $K \in k$ poprowadzmy płaszczyzny φ , których krawędzie z płaszczyznami χ i λ są względem siebie prostopadłe. Krawędzie te (ślady) tworzą dwa rzutowe pęki prostych (1):

$$\varphi_1 \cdot \chi = f_1, \varphi_1 \cdot \lambda = e_1, K(f_1, f_2 \dots) \bar{\wedge} K(e_1, e_2 \dots).$$

Rozważmy szeregi punktów przecięcia prostych a i q odpowiednimi prostymi pęków $K(f_i)$ i $K(e_i)$. Otrzymujemy:

$$a(E_1, E_2 \dots) \bar{\wedge} K(e_1, e_2 \dots) \bar{\wedge} K(f_1, f_2 \dots) \bar{\wedge} q(F_1, F_2 \dots) \\ a(E_i) \bar{\wedge} q(F_i). \quad (4)$$

Następnie przez ten sam punkt K poprowadźmy płaszczyzny ψ_i , których krawędzie z płaszczyznami λ i ϱ są wzajemnie prostopadłe. Otrzymujemy

$$\psi_i \cdot \lambda = u_i \quad \psi_i \cdot \varrho = t_i \quad K(u_1, u_2 \dots) \bar{\wedge} K(t_1, t_2 \dots).$$

Przecięcie tych płaszczyzn krawędziami r i l daje szeregi:

$$r(T_1, T_2 \dots) \bar{\wedge} K(t_1, t_2 \dots) \bar{\wedge} K(u_1, u_2 \dots) \bar{\wedge} l(U_1, U_2 \dots) \\ r(T_i) \bar{\wedge} l(U_i). \quad (5)$$

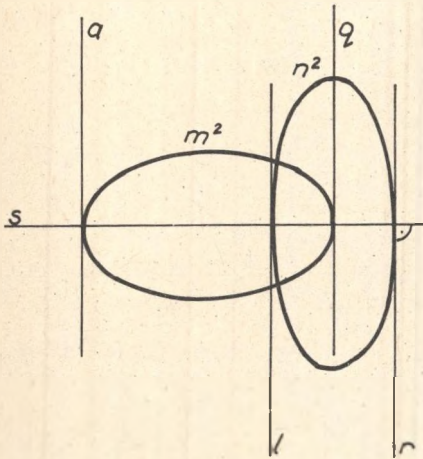
Zauważmy, że szeregi (4) i (5) tworzą dwie stożkowe m^2 i n^2 leżące w płaszczyźnie ściany $\omega = ar$ graniastosłupa. Krawędzie płaszczyzn wiązek $K(\varphi_1, \varphi_2 \dots, \psi_1, \psi_2 \dots)$ z ścianą ω są stycznymi do tych stożkowych.

Płaszczyzny, które przecinają jednocześnie parę płaszczyzn λ i α w prostopadłych do siebie krawędziach f i e oraz parę płaszczyzn λ i ϱ w prostopadłych do siebie krawędziach u i t rozwiązują nasze zagadnienie. Jest oczywiste, że krawędzie ich ze ścianą ω są jednocześnie styczne do stożkowych m^2 i n^2 . W ogólnym przypadku stycznych takich może być cztery. Zauważmy jednak, że

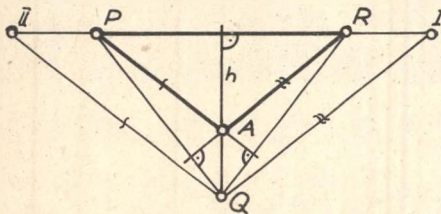
- 1 - stożkowe m^2 i n^2 są symetrycznie położone względem prostej s , stanowiącej krawędź ściany $\omega = ar$ z płaszczyzną $\sigma \in K$, $\sigma \perp a, p, r$.
- 2 - punkty przecięcia prostej s z krawędziami a, q, r, l są punktami styczności tych prostych z stożkowymi m^2 i n^2 . Powyższe wynika

stąd, że w pękach $K(f_1) \bar{\wedge} K(e_1)$ oraz $K(u_1) \bar{\wedge} K(t_1)$ punkty te odpowiadają punktowi niewłaściwemu prostych q, a, l, r .

Ponadto można ustalić, że punkty styczności stożkowej m^2 do prostych a i q rozdzielają parę punktów styczności stożkowej n^2 do prostych l i r (rys. 7). Wystarczy w tym celu rozpatrzyć tę wysokość h trójkąta przekroju, która przechodzi przez jego wnętrze i zauważyć, że niezależnie od tego czy punkt przecięcia się wysokości Q jest punktem wewnętrznym czy też zewnętrznym trójkąta APR , proste przechodzące przez punkt Q i równoległe do boków trójkąta wycinają na podstawie $d = PR$ takie punkty I i II , które wraz z punktami P i R tworzą rozdzielające się pary (PI/RII) (rys. 8).



Rys. 7



Rys. 8

Wnosimy więc, że stożkowe m^2 i n^2 przecinają się w jednej parze punktów rzeczywistych. Wynika stąd, że spośród czterech prostych jednocześnie stycznych do stożkowych m^2 i n^2 dwie będą urojone sprzężone. Istnieją jednak zawsze dwie styczne rzeczywiste, które wraz z punktem K ustalają płaszczyznę tnącą graniastosłup Γ_1 , w trójkącie podobnym do trójkąta \hat{APR} , co należało dowieść.

Z rozważań powyższych jednocześnie wynika, że płaszczyzny te odpowiadają sobie w symetrii prostokątnej, której kierunkiem jest prosta K .

Z rozważań powyższych jednocześnie wynika, że płaszczyzny te odpowiadają sobie w symetrii prostokątnej, której kierunkiem jest prosta K .

LITERATURA

1. Tran Duy Tac: Analiza konstrukcji określonych z dokładnością do podobieństwa n -kątnów płaskich rozpiętych na n prostych dowolnych Gliwice 1973 (rozprawa doktorska).

О НЕКОТОРОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ПОХЛКЕ

Р е з ю м е

В работе представлено новое доказательство теоремы Похлке касающейся косоугольных аксонометрических проекции.

Доказательство произведено методами проективной геометрии.

ABOUT SOME PROOF OF POHLKE'S THEOREM

S u m m a r y

The paper provides a new proof of Pohlke's theorem concerning oblique axonometric projections.

The proof is realized by means of the method of projective geometry.