ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975
Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Ryszard BARTŁOMIEJCZYK

WIELOMIANOWE METODY ITERACYJNE DLA ROWNANIA $x^n - A = 0$

Streszczenie. W niniejszej pracy podano następującą metodę iteracyjną:

$$x_{s+1} = x_s + x_s \sum_{i=1}^{k} \frac{1(n+1)\ \dots\ [(i-1)n+1]}{i!\ n^i} \left(\frac{A-x_s^n}{A}\right)^i \qquad s = 0,1,2,\dots$$

o wykładniku zbieżności równym $k+1$ $(k \in N)$.

Wykazano, że jeżeli

$$x_0 \varphi_k(x_0) > 0, \quad \text{gdy } k \text{ jest liczbą nieparzystą}$$

lub

$$x_0 (A-x_0)^n > 0, \quad \text{gdy } k \text{ jest liczbą parzystą,}$$

to ciąg

$$x_1, x_2, \dots, x_s, \dots$$

jest monotoniczny i zbieżny.

W przypadku, gdy n jest liczbą parzystą i $x_0 < 0$, to

$$\lim_{s \to \infty} x_s = -\sqrt[n]{A},$$

w pozostałych przypadkach

$$\lim_{s \to \infty} x_s = \sqrt[n]{A}.$$

W pracy [1] został rozpatrzony szczególny przypadek tej metody iteracyjnej dla $k=1$, $n=2$.

I. Rozpatrzymy obecnie zagadnienie konstrukcji wielomianowych metod iteracyjnych obliczania $\sqrt[n]{A}$ $(n \geqslant 2)$ o dowolnym naturalnym wykładniku zbieżności $\geqslant 2$.

Mówimy, że funkcja iteracyjna

$$x = \varphi_k(x) \tag{1}$$

określa metodę iteracyjną obliczania $\sqrt[n]{A}$ o wykładniku zbieżności równym $k+1$ $(k \in N)$, jeżeli

$$\varphi_k(\sqrt[n]{A}) = \sqrt[n]{A}, \tag{2}$$

$$\varphi_k^{(i)}(\sqrt[n]{A}) = 0 \quad i = 1(1)k, \tag{3}$$

$$\varphi_k^{(k+1)}(\sqrt[n]{A}) \neq 0 \tag{4}$$

(por. [2]).

Zauważmy, że dla

$$\left|\frac{A-x^n}{A}\right| < 1$$

zachodzi tożsamość

$$x + x\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\,n^i}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^i = \sqrt[n]{A}. \tag{5}$$

Rozwijając bowiem funkcję

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1-y}}$$

w szereg potęgowy, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1-y}} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{n}}{i}(-y)^i \quad |y| < 1,$$

skąd po podstawieniu

$$y = \frac{A-x^n}{A}$$

otrzymujemy tożsamość (1).

W związku z tożsamością (5) wprowadzamy funkcję iteracyjną

$$\varphi_k(x) = x + x \sum_{i=1}^{k} \frac{1(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\ n^i}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^i. \tag{6}$$

Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 1. Funkcja iteracyjna (6) określa metodę iteracyjną obliczania $\sqrt[n]{A}$ o wykładniku zbieżności równym $k+1$. Pochodna funkcji (6) wyraża się wzorem

$$\varphi'_k(x) = \frac{(n+1)\ldots(nk+1)}{k!\ n^k}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^k. \tag{7}$$

D o w ó d. Obliczając pochodną funkcji (6) mamy

$$\varphi'_k(x) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1.(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\ n^i}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^i +$$

$$+ x \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1.(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\ n^i}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^{i-1}\left(-\frac{inx^{n-1}}{A}\right).$$

Przekształcając ostatnią równość otrzymujemy kolejno

$$\varphi'_k(x) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\ n^i}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \frac{1(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\ n^i}\, in\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^i -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \frac{1(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\ n^i}\, in\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^{i-1}$$

$$\varphi'_k(x) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(n+1)\ldots[(i-1)n+1](in+1)}{i!\ n^i}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^i -$$

$$- 1 - \sum_{i=2}^{k} \frac{(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{(i-1)!\ n^{i-1}}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^{i-1},$$

skąd wynika wzór (7).

Z (6) i (7) wynika, że funkcja $\varphi_k(x)$ spełnia odpowiednio warunki (2) i (3).

Różniczkując k-krotnie wzór (7) otrzymujemy dla $x = \sqrt[n]{A}$

$$\varphi_k(k+1)(\sqrt[n]{A}) = \frac{(n+1)2n+1)\ldots(nk+1)}{k!\ n^k}\ k!\left[-\frac{n(\sqrt[n]{A})^{n-1}}{A}\right]^k =$$

$$= (-1)^k \frac{(n+1)(2n+1)\ldots(nk+1)}{\sqrt[n]{A^k}} \neq 0,$$

a więc spełniony jest warunek (4).

Ponieważ funkcja iteracyjna (6) spełnia warunki (2) - (4), więc określa metodę iteracyjną obliczania $\sqrt[n]{A}$ o wykładniku zbieżności równym k+1.

II. Zbadamy obecnie przy jakich wartościach przybliżenia początkowego x_o ciąg

$$x_{s+1} = \varphi_k(x_s) \qquad s = 0,1,2,\ldots \tag{8}$$

jest zbieżny.

Jeżeli

$$\varphi_k(x_o) = 0 \quad \text{lub} \quad x_o = \varepsilon\sqrt[n]{A}, \tag{9}$$

gdzie $\varepsilon = 1$ dla n nieparzystych i $\varepsilon = \pm 1$ dla n parzystych, to

$$x_s = 0 \quad \text{lub} \quad x_s = \varepsilon\sqrt[n]{A} \quad s = 1,2,\ldots$$

a więc

$$\lim_{s\to\infty} x_s = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{s\to\infty} x_s = \varepsilon\sqrt[n]{A}.$$

Z (7) wynika, że

$$\operatorname{sgn} \varphi'_k(x) = \operatorname{sgn}\left[\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^k\right],$$

$$\operatorname{sgn} \varphi''_k(x) = \operatorname{sgn}\left[-\frac{x^{n-1}}{A}\left(\frac{A-x^n}{A}\right)^{k-1}\right].$$

Na podstawie ostatnich wzorów i warunków

$$\varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k(\varepsilon\sqrt[n]{A}) = \varepsilon\sqrt[n]{A}$$

możemy zbadać przebieg zmienności funkcji (6).

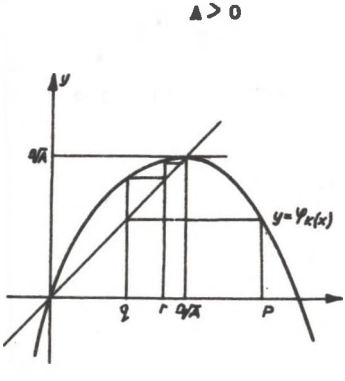
O zbieżności ciągu (8) będziemy wnioskować z wykresów funkcji (6), których postać zależy od parzystości lub nieparzystości liczb n i k oraz od znaku liczby A.

W rozpatrywanych dalej wykresach funkcji $y = \varphi_k(x)$ przyjmujemy następujące oznaczenia:

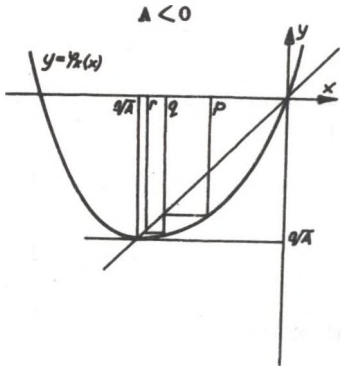
- odcinkiem nad osią Ox (pod osią Ox) oznaczonym x_0 zaznaczamy zbiór przybliżeń początkowych, dla których ciąg (8) jest zbieżny do $\sqrt[n]{A}$ /$-\sqrt[n]{A}$/
- przez p, q, r oznaczamy kolejne przybliżenia x_0, x_1, x_2 ciągu (8).

Rozpatrzymy kolejno następujące cztery możliwe przypadki:

1° Zakładamy, że n i k są liczbami nieparzystymi. Na rys. 1 i 2 przedstawiono przebieg zmienności funkcji (6) w zależności od liczby A.



Rys. 1



Rys. 2

Z rys. 1 i 2 wynika, że ciąg (8) jest zbieżny do $\sqrt[n]{A}$, gdy:

$$x_o > 0 \quad \text{i} \quad \varphi_k(x_o) > 0 \quad \text{dla} \quad A > 0,$$

$$x_o < 0 \quad \text{i} \quad \varphi_k(x_o) < 0 \quad \text{dla} \quad A < 0.$$

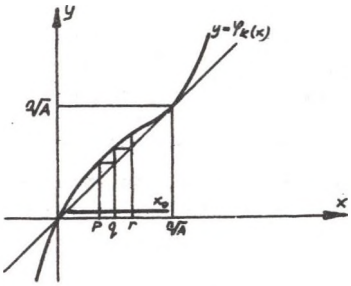
Zatem jeżeli

$$x_o \varphi_k(x_o) > 0,$$

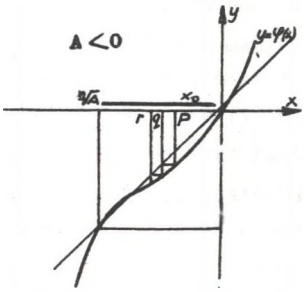
to ciąg (8) jest zbieżny do $\sqrt[n]{A}$.

2° Załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą, a k jest liczbą parzystą.

$A > 0$



Rys. 3



Rys. 4

Na podstawie rys. 3 i 4 wnioskujemy, że ciąg (8) jest zbieżny do $\sqrt[n]{A}$, gdy:

$$x_o > 0 \quad \text{i} \quad A - x_o^n > 0 \quad \text{dla} \quad A > 0,$$

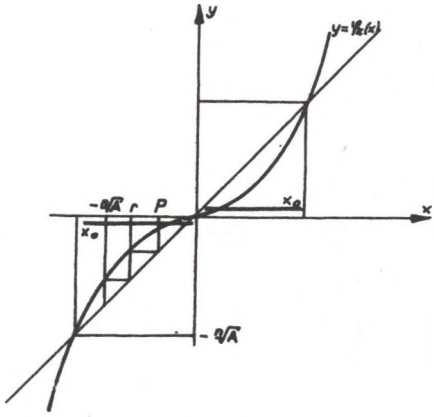
$$x_o < 0 \quad \text{i} \quad A - x_o^n < 0 \quad \text{dla} \quad A < 0.$$

Stąd wynika, że jeżeli

$$x_o(A - x_o^n) > 0,$$

to ciąg (8) jest zbieżny do $\sqrt[n]{A}$.

3° Zakładamy, że n i k są liczbami parzystymi $(A > 0)$.



Rys. 5

Jeżeli $x_0 > 0$ i $A - x_0^n > 0$, to $\lim\limits_{s \to \infty} x_s = \sqrt[n]{A}$;

jeśli $x_0 < 0$ i $A - x_0^n < 0$, to $\lim\limits_{s \to \infty} x_s = -\sqrt[n]{A}$.

Uwaga 1. Jeżeli przybliżenie początkowe x_0 nie spełnia warunków wymienionych odpowiednio w punktach 1° - 3° i nie spełnia warunków (9), to dla $A \neq 0$ ciąg (8) jest rozbieżny.

4° Rozpatrzymy obecnie ostatni z przypadków; n jest liczbą parzystą, a k jest liczbą nieparzystą $(A > 0)$.

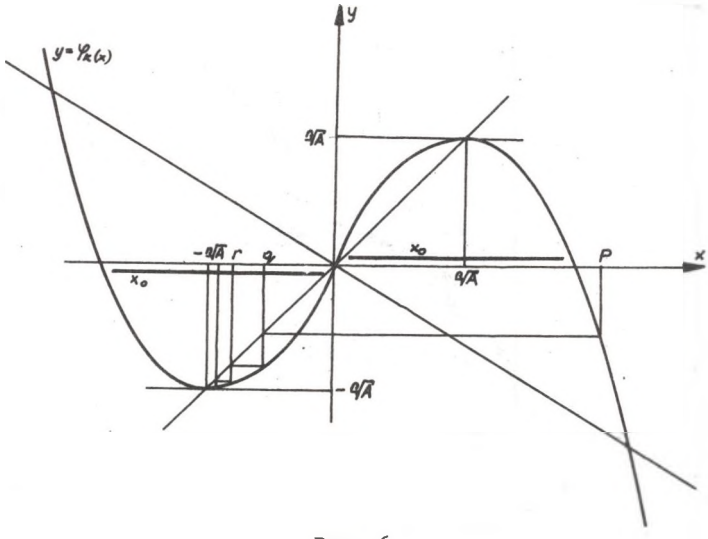
Z rys. 6 wynika, że jeżeli

$$x_0 \varphi_k(x_0) > 0,$$

to ciąg (8) jest zbieżny; przy czym dla $x_0 < 0$ granica tego ciągu jest równa $-\sqrt[n]{A}$, a dla $x_0 > 0$ granica ciągu jest równa $\sqrt[n]{A}$.

Uwaga 2. Zauważmy jednak, że istnieją w tym przypadku przybliżenia początkowe x_0, dla których ciąg (8) jest zbieżny mimo że $x_0 \varphi_k(x_0) < 0$ (np. $x_0 = p$ na rys. 6).

Szczegółową analizę przypadku 4° można przeprowadzić analogicznie jak w pracy [1], gdzie został szczegółowo zbadany ten przypadek dla $n=2$, $k=1$.



Rys. 6

Na podstawie rozpatrzonych przypadków można sformułować

TWIERDZENIE 2. Jeżeli

$$x_0\varphi_k(x_0) > 0, \quad \text{gdy } k \text{ jest liczbą nieparzystą}$$

lub

$$x_0(A-x_0^n) > 0, \quad \text{gdy } k \text{ jest liczbą parzystą.}$$

to ciąg (8) jest zbieżny, przy czym ciąg

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

jest silnie monotoniczny.

W przypadku, gdy n jest liczbą parzystą i $x_0 < 0$

$$\lim_{s\to\infty} x_s = -\sqrt[n]{A},$$

w pozostałych przypadkach

$$\lim_{s\to\infty} x_s = \sqrt[n]{A}.$$

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Hwang W.G., Todd J.: A Recurrence Relation for the Square Root, Journal of Aproximation Theory 9, 299-306 (1973).

[2] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej, Warszawa 1971.

ПОЛИНОМНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $x^n - A = 0$

Р е з ю м е

В работе представлен следующий итерационный метод

$$x_{s+1} = x_s + x_s \sum_{i=1}^{k} \frac{1(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\,n^i}\left(\frac{A - x_s^n}{A}\right)^i \qquad s = 0,1,2,\ldots$$

с порядком сходимости равным $k+1$ $(k \in N)$.

Доказано, что если

$$x_0\varphi_k(x_0) > 0 \quad \text{если } k \text{ является нечётным числом}$$

или

$$x_0(A - x_0^n) > 0 \quad \text{если } k \text{ является четным числом,}$$

то ряд

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

является монотонный и сходимый.

В случае, если n является чётным числом и $x_0 < 0$, то

$$\lim_{s\to\infty} x_s = -\sqrt[n]{A},$$

в остальных случаях

$$\lim_{s\to\infty} x_s = \sqrt[n]{A}.$$

THE POLYNOMIAL ITERATIVE METHODS FOR THE EQUATION $x^n - A = 0$

S u m m a r y

In the paper the following iterative method

$$x_{s+1} = x_s + x_s \sum_{i=1}^{k} \frac{1(n+1)\ldots[(i-1)n+1]}{i!\, n^i} \left(\frac{A-x_s^n}{A}\right)^i \qquad s = 0,1,2,\ldots$$

is given. The order of convergence of this method is equal $k+1$ $(k \in N)$.

It is proved that if

$$x_0 \varphi_k(x_0) > 0 \quad \text{when } k \text{ is an odd number}$$

or

$$x_0(A-x_c^n) > 0 \quad \text{when } k \text{ is an even number,}$$

then the sequence

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

is monotonic and convergent.

In the case when n is an even number and $x_0 < 0$, then

$$\lim_{s\to\infty} x_s = -\sqrt[n]{A};$$

in others cases

$$\lim_{s\to\infty} x_s = \sqrt[n]{A}$$