ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Ryszard BARTŁOMIEJCZYK

WIELOMIANOWE METODY ITERACYJNE DLA RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Streszczenie. W niniejszej pracy podano algorytm pozwalający wyznaczyć dla danego równania algebraicznego stopnia n $(n \geqslant 2)$ wielomianową metodę iteracyjną obliczania pierwiastków tego równania o wykładniku zbieżności równym $k + 1$ $(k \in N)$, której stopień jest $< (k + 1)\,n$.

Wykazano, że jeżeli pierwiastki równania są liczbami algebraicznymi stopnia n nad najmniejszym ciałem liczbowym zawierającym współczynniki tego równania, to istnieje dokładnie jedna wielomianowa metoda iteracyjna spełniająca podane wyżej warunki.

I. Rozpatrzmy zagadnienie konstrukcji metod iteracyjnych

$$x_{s+1} = \varphi(x_s) \quad s = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

gdzie $\varphi(x)$ jest wielomianem zmiennej x, dla przybliżonego obliczania pierwiastków ustalonego równania algebraicznego

$$W_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_o = 0, \quad n > 2 \tag{2}$$

o współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych.

Przez $R^* = R\ (a_o,a_1,\ldots,a_n)$ oznaczmy najmniejsze podciało ciała liczb zespolonych zawierające współczynniki

$$a_o,a_1,\ldots,a_m$$

równania (2).

Zakładamy, że pierwiastki równania (2) są liczbami algebraicznymi stopnia n nad ciałem R, skąd wynika, że jeżeli współczynniki wielomianu $U(x)$ należą do ciała R i ξ jest pierwiastkiem wielomianu (2) to jest spełniony warunek

$$\text{st } U(x) < n \text{ i } U(\xi) = 0 \Rightarrow U(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Wynika stąd w szczególności, że

$$(W_n(x),\ W_n'(x)) = 1. \tag{4}$$

a zatem równanie (2) posiada pierwiastki jednokrotne.
Zakładamy nadto, że współczynniki wielomianu $\varphi(x)$ określającego metodę iteracyjną (1) należą do ciała R^*.

Wprowadzimy obecnie definicję i udowodnimy 4 lematy charakteryzujące budowę wielomianu $\varphi(x)$ określającego metodę iteracyjną (1).

DEFINICJA 1. Mówimy, że dla równania (2) mamy określoną wielomianową metodę iteracyjną (w.m.i.) (1) o wykładniku zbieżności $k+1$ $(k \in N)$, jeżeli wielomian $\varphi(x)$ występujący w (1) spełnia warunki

$$\varphi(\xi) = \xi \tag{5}$$

$$\varphi^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 1\ (1)\ k, \tag{6}$$

$$\varphi^{(k+1)}(\xi) \neq 0 \tag{7}$$

dla każdego pierwiastka ξ równania (2) (por. [1]).

Z (3) wynika:

<u>Wniosek 1</u>. Jeżeli istnieje pierwiastek wielomianu (2) spełniający warunki (5) - (7), to każdy pierwiastek tego wielomianu spełnia warunki (5) - (7).

Stwierdzamy bowiem, że reszty z dzielenia wielomianów

$$\varphi(x) - x, \quad \varphi^{(i)}(x) \quad i = 1\ (1)\ k$$

przez wielomian $W_n(x)$ są tożsamościowo równe 0, a reszta z dzielenia wielomianu

$$\varphi^{(k+1)}(x)$$

przez wielomian $W_n(x)$ nie jest tożsamościowo równa 0.

W związku z powyższym wnioskiem dalsze rozważania przeprowadzamy dla ustalonego pierwiastka ξ równania (2).

Z wniosku 1 łatwo otrzymujemy

<u>Wniosek 2</u>. Wielomian $\varphi(x)$ spełniający warunki

$$\varphi(\xi) = \xi, \qquad \varphi'(\xi) = 0 \tag{8}$$

określa dla równania 2 w.m.i. o wykładniku zbieżności $\geqslant 2$; nadto

$$\varphi'(x) \not\equiv 0$$

Gdyby

$$\varphi^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 1,2,\dots$$

to

$$\varphi(x) = \text{const},$$

a zatem wobec (8) $\varphi(x) \equiv \xi$.

Z ostatniej tożsamości wynika, że $\xi \in R^*$, co jest sprzeczne z założeniem, że ξ jest liczbą algebraiczną stopnia $n \geqslant 2$ nad ciałem R^*.

Istnieje zatem liczba naturalna k taka, że

$$\varphi^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 1\ (1)\ k, \quad \varphi^{(k+1)}(\xi) \neq 0.$$

Stąd wobec definicji (1) i wniosku 1 otrzymujemy, że wielomian $\varphi(x)$ określa w.m.i. dla równania (2) o wykładniku zbieżności równym $k+1$.

Stosując algorytm Euklidesa można dowolny wielomian $\varphi(x)$ o współczynnikach z ciała R^* przedstawić w postaci

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) \left[W_n(x)\right]^i, \tag{9}$$

gdzie wielomiany

$$\alpha_i(x) \quad i = 0,1,2,\dots$$

stopni $< n$ są jednoznacznie wyznaczone przez tożsamość (9), a współczynniki tych wielomianów należą do ciała R^*, przy czym

$$\alpha_i(x) \equiv 0 \ \text{ dla } \ i > \frac{1}{n} \cdot \text{st}\ \varphi(x).$$

<u>Lemat 1</u>. Wielomian $\Phi(x)$ o współczynnikach z ciała R^* można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$\Phi(x) = \sum_{i=k+1}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i, \quad k \in N, \tag{10}$$

gdzie $l_i(x)$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ są wielomianami stopnia $< n$; wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 0\ (1)\ k. \tag{11}$$

D o w ó d. Obliczając wartość funkcji $\Phi(x)$ i jej kolejnych pochodnych w punkcie $x = \xi$ otrzymujemy równości (11).■

Załóżmy, że dla wielomianu $\Phi(x)$ są spełnione warunki (11). Z (9) wynika, że wielomian $\Phi(x)$ można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i, \tag{12}$$

gdzie $l_i(x)$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ są wielomianami stopnia $< n$ o współczynnikach z ciała R^*.

Wykażemy indukcyjnie, że

$$l_i(x) \equiv 0 \quad i = 0\ (1)\ k.$$

Ponieważ $\Phi(\xi) = l_o(\xi) = 0$, więc wobec (3) $l_o(x) \equiv 0$. Załóżmy, że

$$l_i(x) \equiv 0 \quad i = 0\ (1)\ j-1, \quad j \leqslant k.$$

Wobec założenia indukcyjnego funkcja (12) ma postać:

$$\Phi(x) = \sum_{i=j}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i.$$

Stąd wynika, że

$$0 = \Phi^{(j)}(\xi) = l_j(\xi)\ j!\left[W_n'(\xi)\right]^j,$$

a zatem $l_j(\xi) = 0$, a więc wobec (3) $l_j(x) \equiv 0$.■■

Lemat 2. Jeżeli dla danego równania (2) w.m.i. $\psi(x)$ posiada wykładnik zbieżności $\geqslant k+1$, to

$$\psi'(x) = l(x)\left[W_n(x)\right]^k, \tag{13}$$

gdzie $l(x) \not\equiv 0$. Jeśli nadto

$$(l(x), \ W_n(x)) = 1, \tag{14}$$

to w.m.i. $\varphi(x)$ posiada wykładnik zbieżności równy $k+1$.

D o w ó d. Z założenia lematu mamy

$$\psi'(\xi) = \ldots = \psi^{(k)}(\xi) = 0.$$

Przedstawiając funkcję $\psi'(x)$ według wzoru (9), otrzymujemy

$$\psi'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i.$$

Przyjmując $\Phi(x) = \psi'(x)$ mamy

$$\Phi(\xi) = \Phi'(\xi) = \ldots = \Phi^{(k-1)}(\xi) = 0,$$

skąd na mocy lematu 1

$$\psi'(x) = \sum_{i=k}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i = \left[W_n(x)\right]^k l(x).$$

Ponieważ $\psi'(x) \not\equiv 0$ (wniosek 2), więc $l(x) \not\equiv 0$.
Z (14) wynika, że $l(\xi) \neq 0$, a zatem

$$\psi^{(k+1)}(\xi) = l(\xi)k!\left[W_n(\xi)\right]^k \neq 0,$$

(gdyż $W_n'(\xi) \neq 0$) co oznacza, że w.m.i. $\psi(x)$ posiada wykładnik zbieżności równy $k+1$.

<u>Wniosek 3</u>. Wykładnik zbieżności w.m.i. $\psi(x)$ jest $\leqslant \left[\frac{\mathrm{st}\,\psi(x)}{n}\right] + 1$.
Z lematu 2 wynika, że $\mathrm{st}\,\psi(x) > k\,n$, skąd otrzymujemy kolejno

$$k \leqslant \frac{\mathrm{st}\,\psi(x)}{n}, \quad k \leqslant \left[\frac{\mathrm{st}\,\psi(x)}{n}\right]. \blacksquare$$

Bezpośrednio z wniosku 3 uzyskujemy

Wniosek 4. Jeżeli

$$\text{st}\ \varphi(x) < (k+1)\ n \tag{15}$$

to wykładnik zbieżności w.m.i. $\varphi(x)$ jest $\leqslant$ k+1.

Lemat 3. Dla danego równania (2) i danej liczby k $(k \in N)$ istnieje co najwyżej jedna w.m.i. $\varphi(x)$ o wykładniku $\geqslant$ k+1 spełniająca warunek (15).

D o w ó d. Niech wielomiany $\varphi(x)$ i $\tilde{\varphi}(x)$ określają dwie metody iteracyjne dla równania (2) spełniające założenia lematu, tzn.

$$\begin{aligned} &\varphi(\xi) = \xi, \quad \varphi^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 1\ (1)\ k, \quad \text{st}\ \varphi(x) < (k+1)\ n \\ &\tilde{\varphi}(\xi) = \xi, \quad \tilde{\varphi}^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 1\ (1)\ k, \quad \text{st}\ \tilde{\varphi}(x) < (k+1)\ n. \end{aligned} \tag{16}$$

Przyjmijmy $\Phi(x) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$. Z (16) wynika, że

$$\Phi^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 0\ (1)\ k,$$

zatem na podstawie lematu 1

$$\Phi(x) = \sum_{i=k+1}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i,$$

a ponieważ $\text{st}\ \Phi(x) < (k+1)\ .\ n$, więc $\Phi(x) \equiv 0$.

Lemat 4. Jeżeli dla danego równania (2) istnieje w.m.i. $\varphi(x)$ o wykładniku zbieżności $>$ k+1, to dla każdej liczby naturalnej $s \leqslant k$ istnieją także w.m.i. $\varphi_s(x)$ o wykładniku zbieżności równym s+1 takie, że

$$\text{st}\ \varphi_s(x) < (s+1)\ n.$$

D o w ó d. Z założenia lematu mamy

$$\varphi(\xi) = \xi, \quad \varphi^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 1\ (1)\ k. \tag{17}$$

Rozwijając funkcję $\psi(x)$ według (9) otrzymujemy

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i.$$

Wykażemy, że w.m.i.

$$\psi_s(x) = \sum_{i=0}^{s} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i$$

posiadają wykładnik zbieżności równy $s+1$.

Z wniosku 4 wynika, że wykładnik zbieżności w.m.i. $\psi_s(x)$ jest $\leqslant s+1$. Mamy

$$\Phi(x) = \psi(x) - \psi_s(x) = \sum_{i=s+1}^{\infty} l_i(x)\left[W_n(x)\right]^i,$$

stąd na mocy lematu 1

$$\Phi^{(i)}(\xi) = \psi^{(i)}(\xi) - \psi_s^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 0(1)s.$$

Stąd wobec (17)

$$\psi_s(\xi) = \xi, \quad \psi_s^{(i)}(\xi) = 0 \quad i = 1\,(1)\,s,$$

co oznacza, że wykładnik zbieżności w.m.i. $\psi_s(x)$ jest $\geqslant s+1$.

II. W monografii [2] (str. 157) podano metodę konstrukcji w.m.i. dla danego równania algebraicznego o dowolnie wysokim wykładniku zbieżności.

Podamy obecnie pewien sposób konstrukcji w.m.i. dla danego równania algebraicznego, pozwalający wyznaczyć funkcję iteracyjną o ustalonym wykładniku zbieżności oraz jej pochodną.

Ponieważ jest spełniony warunek (4), więc istnieją wielomiany $p(x)$ i $q(x)$ takie, że

$$p(x)\, W_n'(x) - q(x)\, W_n(x) = 1. \tag{18}$$

Jeżeli

$$\text{st}\ p(x) \leqslant n - 1, \quad \text{st}\ q(x) \leqslant n - 2,$$

to wielomiany $p(x)$ i $q(x)$ są określone jednoznacznie przez tożsamość (18).

Niech

$$l_i(x) \qquad i = 1,2,\ldots \tag{19}$$

oznacza ciąg dowolnych wielomianów.

Wprowadźmy następujące wielomiany

$$\beta_o(x) \equiv 1,$$

$$\alpha_i(x) \equiv -\frac{1}{i}\beta_{i-1}(x)\; p(x) + l_i(x)\; W_n(x),$$

$$\beta_i(x) \equiv -\beta_{i-1}(x)\; q(x) + \alpha_i'(x) + i\; l_i(x)\; W_n'(x), \qquad i = 1,2,\ldots \tag{20}$$

gdzie wielomiany $p(x)$ i $q(x)$ określa tożsamość (18).

TWIERDZENIE 1. Dla dowolnej liczby naturalnej k wielomian

$$\varphi_k(x) = x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x)\left[W_n(x)\right]^i \tag{21}$$

określa w.m.i. dla równania (2) o wykładniku zbieżności $\geqslant k+1$.

Pochodna funkcji (21) wyraża się wzorem

$$\varphi'_k(x) = \beta_k(x)\left[W_n(x)\right]^k. \tag{22}$$

D o w ó d. Wykażemy indukcyjnie wzór (22).
Dla $k = 1$ mamy

$$\varphi_1(x) = x + \alpha_1(x)\; W_n(x),$$

$$\alpha_1(x) = -p(x) + l_i(x)\; W_n(x),$$

$$\beta_1(x) = -q(x) + \alpha_1'(x) + l_1(x)\; W_n'(x).$$

Obliczając $\varphi'_1(x)$ i stosując (18) otrzymujemy

$$\varphi'_1(x) = 1 + (-p(x) + l_1(x)\; W_n(x))\; W_n'(x) + \alpha_1'(x)\; W_n(x) =$$

$$= -q(x)\; W_n(x) + l_1(x)\; W_n(x)\; W_n'(x) + \alpha_1'(x)\; W_n(x) = \beta_1(x)\; W_n(x).$$

Załóżmy, że

$$\varphi'_{k-1}(x) = \beta_{k-1}(x)\left[W_n(x)\right]^{k-1}.$$

Ponieważ

$$\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x) + \alpha_k(x)\left[W_n(x)\right]^k,$$

więc na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy:

$$\varphi'_k(x) = \beta_{k-1}(x)\left[W_n(x)\right]^{k-1} +$$

$$+ \left[-\frac{1}{k}\beta_{k-1}(x)\ p(x) + l_k(x)\ W_n(x)\right] k\left[W_n(x)\right]^{k-1} W'_n(x) + \alpha'_k(x)\left[W_n(x)\right]^k =$$

$$= \beta_{k-1}(x)\left[W_n(x)\right]^{k-1}(1 - p(x)\ W'_n(x)) + k\ l_k(x)\left[W_n(x)\right]^k W'_n(x) +$$

$$+ \alpha'_k(x)\left[W_n(x)\right]^k,$$

skąd po zastosowaniu (18) otrzymujemy(22).

Z (21) wynika, że

$$\varphi_k(\xi) = \xi,$$

natomiast z (22) wynika

$$\varphi'_n(\xi) = \dots = \varphi_k^{(k)}(\xi) = 0. \blacksquare$$

Wniosek 5. W.m.i. określona wielomianem

$$\tilde{\varphi}_k(x) = x + \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i(x)}{i!}\left[- W_n(x)\right]^i,$$

gdzie

$$p_1(x) = p(x), \quad p_{i+1}(x) = p(x)\ p'_i(x) + i\ q(x)\ p_i(x)$$

$$i = 1,2,\dots$$

posiada wykładnik zbieżności $\geqslant k + 1$ (por. [2]).

Z (20) wynika

$$\alpha_{i+1}(x) = -\frac{1}{i+1}\, p(x)\left[-\beta_{i-1}(x)\, q(x) + \alpha'_i(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{i+1}\left[p(x)\, q(x)\, \beta_{i-1}(x) - p(x)\,\alpha'_i(x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{i+1}\left[p(x)\,\alpha'_i(x) - i\, q(x)\,\alpha_i(x)\right].$$

Przyjmując w ostatniej tożsamości

$$\alpha_{i+1}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}\, p_i(x) \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

otrzymujemy wniosek 5.

DEFINICJA 2. W.m.i. $\varphi(x)$ dla równania (2) o wykładniku zbieżności równym $k+1$ nazywamy optymalną w.m.i, jeżeli

$$\mathrm{st}\, \varphi(x) < (k+1)\, n.$$

Z lematów 3 i 4 oraz twierdzenia 1 wynika

TWIERDZENIE 2. Dla ustalonego równania (2) i danej liczby naturalnej k istnieje dokładnie jedna optymalna w.m.i. Optymalną w.m.i. $\varphi_k(x)$ o wykładniku zbieżności równym $k+1$ można wyznaczyć na podstawie twierdzenia 1, obierając wielomiany (19) tak by

$$\mathrm{st}\, \alpha_i(x) \leqslant n - 1 \qquad i = 1\ (1)\ k.$$

Zauważmy, że w.m.i. dla równania

$$x^n - A = 0$$

podane w [3] są optymalnymi w.m.i.

W.m.i. dla równania (2) można wyznaczyć stosując algorytm z twierdzenia 1 również w przypadku gdy spełnione jest tylko założenie (4). Jednak w tym przypadku nie można zagwarantować jednoznaczności optymalnych w.m.i.

Wyprowadzimy obecnie wzory na optymalne w.m.i. o wykładniku zbieżności równym 2 i 3 dla równania

$$x^3 + p\, x + q = 0. \tag{23}$$

Stosując metodę współczynników nieoznaczonych wyznaczamy dla wielomianu (23) wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ występujące w tożsamości (18). Otrzymujemy

$$P(x) = \frac{1}{\Delta}\left(6\,p\,x^2 - 9\,q\,x + 4\,p^2\right)$$

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta}\left(18\,p\,x - 27\,q\right),$$

gdzie

$$\Delta = 4\,p^3 + 27\,q^2.$$

Stąd na podstawie wzorów (20) mamy

$$\alpha_1(x) = -\,P(x),$$

$$\beta_1(x) = -\,Q(x) + \alpha_1'(x) = -\,Q(x) - P'(x) =$$

$$= -\,\frac{1}{\Delta}\left(30\,p\,x - 36\,q\right),$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{\Delta^2}\left(-\,243\,pq\,x^2 - 30\,p^3\,x + 162\,q^2\,x - 162\,p^2q\right),$$

$$\beta_2(x) = \frac{1}{\Delta^2}\left(-\,1944\,pq\,x - 210\,p^3 + 1134\,q^2\right).$$

Wstawiając otrzymane wielomiany do wzorów (21) i (22) dla $k=1,2$ otrzymujemy optymalne w.m.i. dla równania (23).

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1971.
[2] Householder A.S.: Principles of numerical analysis. New York 1953.
[3] Bartłomiejczyk R.: Wielomianowe metody iteracyjne dla równania $x^n - A = 0$. Zesz. Nauk. Pol. Śl. seria: Mat.-Fiz. (w tym zeszycie).

ПОЛИНОМНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе представлен алгоритм, позволяющий определить для данного алгебраического уравнения степени n $(n>2)$, полиномный итерационный метод расчёта корней этого уравнения с порядком сходимости $k+1$ $(k \in N)$ и степени $<(k+1)n$.

Доказано, что если корни уравнения являются алгебраическими числами степени n под наименьшим полем чисел, содержащим коэффициенты этого уравнения, то существует только единственный полиномный итерационный метод, удовлетворяющий представленным выше условиям.

THE POLYNOMIAL ITERATIVE METHODS FOR THE ALGEBRAIC EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper there is an algorithm, which allows to assign for the given algebraic equation of the n-th degree $(n \geqslant 2)$, the polynomial iterative method of calcutating of roots of this equation, with the order of convergence $k+1$ $(k \in N)$, which degree is $< (k+1)\, n$.

It is proved, that if roots of the equation are algebraic numbers of n-th degree on the minimal number body containing the coefficients of this equation, then there exists exactly one polynomial iterative method fulfilling conditions given above.