ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Piotr PIELORZ

O PEWNYCH DWUPUNKTOWYCH METODACH PODWYŻSZANIA WYKŁADNIKA ZBIEŻNOŚCI METOD ITERACYJNYCH

Streszczenie. W niniejszej pracy podano dwie metody podwyższania o 1 wykładnika zbieżności (rzędu zbieżności) danej metody iteracyjnej

$$x = \varphi(x)$$

dla równania

$$f(x) = 0$$

posiadającego pierwiastek α taki, że $f'(\alpha) \neq 0$.
Metody te określone wzorami

$$\psi_0(x) = \frac{\varphi(x) \cdot f(x) - x \cdot f(\varphi(x))}{f(x) - f(\varphi(x))}$$

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - \frac{f(\varphi(x))}{f'(x)}$$

zostały otrzymane na podstawie pracy [1].
Podano interpretację geometryczną wprowadzonych metod iteracyjnych (w przypadku gdy $f(x)$ jest funkcją rzeczywistą). Rozpatrzono szczególne przypadki tych metod, gdy za funkcję $\varphi(x)$ przyjęto funkcję iteracyjną Newtona $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Funkcje $\psi_0(x)$. i $\psi_1(x)$ określają w tym przypadku metody iteracyjne, z których pierwsza została szczegółowo zbadana w [2], natomiast druga określa metodę iteracyjną, której nie znalazłem w dostępnej literaturze.
Porównano wskaźniki efektywności wprowadzonych metod i metody Newtona. Podano również inny dowód dwóch metod podwyższających wykładnik zbieżności funkcji iteracyjnych zawartych w [3] i [4]. Metody te korzystają z pochodnej funkcji iteracyjnej wyjściowej.

I. Rozpatrzmy równanie

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej lub zespolonej posiadającej pierwiastek $x = \alpha$.

Niech dla równania (1) będzie dana funkcja iteracyjna

$$x = \varphi(x) \tag{2}$$

o wykładniku zbieżności równym k $(k \in N)$, tzn.

$$|\varphi(x) - \alpha| = O(|x - \alpha|^k), \quad x \to \alpha.$$

Jeżeli przybliżenie x_o jest dostatecznie bliskie α i $k \geqslant 2$, to ciąg

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

jest zbieżny do pierwiastka α równania (1), przy czym

$$|x_{n+1} - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^k), \quad n \to \infty.$$

Jeżeli funkcja (2) jest k-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu $x = \alpha$ i $\varphi^{(k)}(x)$ jest ciągła w tym otoczeniu, to wykładnik zbieżności funkcji iteracyjnej (2) jest równy co najmniej k, gdy

$$\varphi(\alpha) = \alpha, \quad \varphi'(\alpha) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(\alpha) = 0. \tag{4}$$

Jeżeli nadto

$$\varphi^{(k)}(\alpha) \neq 0,$$

to wykładnik zbieżności funkcji iteracyjnej (2) jest równy dokładnie k.

Załóżmy, że funkcja $\varphi(x)$ jest klasy $C^{(1)}$ a funkcja $f(x)$ klasy $C^{(k+1)}$ w pewnym otoczeniu punktu $x = \alpha$ oraz $f'(\alpha) \neq 0$.

W pracy [1] na podstawie metody iteracyjnej (2) o wykładniku zbieżności $\geqslant k$ skonstruowano następujące dwie metody iteracyjne

$$\phi_o(x) = x - \frac{f(x)}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[\varphi(x) - x\right]^{i-1}},$$

$$\phi_1(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{f'(x)} \sum_{i=2}^{k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[\varphi(x) - x\right]^{i}$$

o wykładniku zbieżności $\geqslant k+1$.

Zauważmy, że podane metody iteracyjne można przedstawić w postaci

$$\Phi_0(x) = \varphi(x) - \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[\varphi(x) - x\right]^i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[\varphi(x) - x\right]^{i-1}},$$

$$\Phi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{f'(x)} \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[\varphi(x) - x\right]^i. \tag{5}$$

Na podstawie wzoru Taylora mamy

$$f(\varphi(x)) = f(x + (\varphi(x) - x)) \approx \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left[\varphi(x) - x\right]^i.$$

Wzory (5) można zatem zapisać w postaci

$$\psi_0(x) = \varphi(x) - \frac{\left[\varphi(x) - x\right] . f(\varphi(x))}{f(\varphi(x)) - f(x)} = \frac{\varphi(x)\, f(x) - x\, .\, f(\varphi(x))}{f(x) - f(\varphi(x))},$$

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - \frac{f(\varphi(x))}{f'(x)}, \tag{6}$$

Wykażemy obecnie twierdzenie o wykładniku zbieżności funkcji iteracyjnych (6).

TWIERDZENIE 1. Załóżmy, że funkcja $\varphi(x)$ jest klasy $C^{(1)}$, a funkcja $f(x)$ klasy $C^{(2)}$ w pewnym otoczeniu punktu $x = \alpha$. Jeżeli funkcja iteracyjna (2) posiada wykładnik zbieżności k $(k \geqslant 2)$, to funkcje iteracyjne (6) posiadają wykładnik zbieżności $\geqslant k+1$.

D o w ó d. Z (6) wynika, że

$$\psi_0(x) - \alpha = \frac{\left[\varphi(x) - \alpha\right] . f(x) - (x - \alpha)\, .\, f(\varphi(x))}{f(x) - f(\varphi(x))},$$

$$\psi_1(x) - \alpha = \frac{\left[\varphi(x) - \alpha\right] f'(x) - f(\varphi(x))}{f'(x)}. \tag{7}$$

Na podstawie wzoru Taylora mamy:

$$f'(x) = f'(\alpha) + O(|x-\alpha|)$$

$$f(x) = f'(\alpha)(x-\alpha) + O(|x-\alpha|^2)$$

$$f(\varphi(x)) = f'(\alpha)\left[\varphi(x)-\alpha\right] + O(|\varphi(x)-\alpha|^2).$$

Stosując ostatnie warunki w (7) otrzymujemy

$$\psi_0(x) - \alpha = \frac{\left[\varphi(x)-\alpha\right]O(|x-\alpha|^2) - (x-\alpha)O(|\varphi(x)-\alpha|^2)}{f(x) - f(\varphi(x))} \tag{8}$$

$$\psi_1(x) - \alpha = \frac{\left[\varphi(x)-\alpha\right]O(|x-\alpha|) - O(|\varphi(x)-\alpha|^2)}{f'(x)}. \tag{9}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\left[f'(x) - f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right] = f'(\alpha) \neq 0 \tag{10}$$

Z (10) na podstawie (8) wnioskujemy, że

$$\psi_0(x) - \alpha = O(|x-\alpha|^{k+1}),$$

natomiast z (9) wynika

$$\psi_1(x) - \alpha = O(|x-\alpha|^{k+1}).$$

Rozpatrzmy obecnie metodę iteracyjną $\psi_0(x)$ w przypadku, gdy funkcja iteracyjna (2) spełnia warunek

$$\psi'(\alpha) = k \neq 0, \tag{11}$$

tzn. gdy ciąg (3) jest zbieżny, a metoda iteracyjna (2) posiada wykładnik zbieżności równy 1.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli $k \neq 1$, to funkcja iteracyjna $\psi_0(x)$ posiada wykładnik zbieżności $\geqslant 2$.

D o w ó d przeprowadzimy wykorzystując (8).

Z (11) otrzymujemy

$$\varphi(x) - \alpha = O(|x - \alpha|), \quad x \to \alpha$$

skąd wynika warunek

$$[\varphi(x) - \alpha] \cdot O(|x - \alpha|^2) - (x - \alpha) \cdot O(|\varphi(x) - \alpha|^2) = O(|x - \alpha|^3), \quad x \to \alpha \tag{12}$$

Na podstawie (10) mamy:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{x - \alpha} = f'(\alpha) \cdot (1 - k) \neq 0. \tag{13}$$

Z (12) i (13) na podstawie (8) wnioskujemy, że

$$\psi_0(x) - \alpha = O(|x - \alpha|^2); \quad x \to \alpha$$

<u>Wniosek</u>. Jeżeli $k \neq 1$, to dla funkcji $\psi_0(x)$ pierwiastek α jest punktem przyciągania, tzn. istnieje otoczenie pierwiastka, α, że dla x_0 należącego do tego otoczenia ciąg

$$x_0, \; x_1 = \psi_0(x_0), \ldots, x_{n+1} = \psi_0(x_n), \ldots$$

jest zbieżny do pierwiastka α równania (1).

II. Rozpatrzmy obecnie interpretację geometryczną metod iteracyjnych (6) w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcją rzeczywistą.
Oznaczając

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

mamy:

$$\psi_0(x_0) = \frac{x_1 \cdot f(x_0) - x_0 \cdot f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)},$$

$$\psi_1(x_0) = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)}. \tag{14}$$

Niech

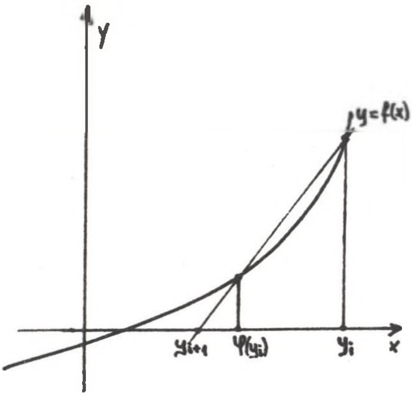
$$y_{i+1} = \varphi_0(y_i) \qquad i = 1,2,\dots,$$

$$\tilde{y}_{i+1} = \varphi_1(\tilde{y}_i) \qquad i = 1,2,\dots.$$

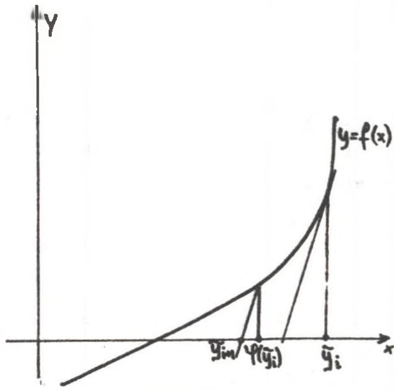
Z (14) wynika, że przybliżenie y_{i+1} otrzymujemy, stosując metodę siecznych do równania

$$f(x) = 0$$

w punktach o odciętych y_i, $\varphi(y_i)$ (rys. 1).



Rys. 1



Rys. 2

Natomiast przybliżenie $\tilde{y}_{i+1}$ otrzymujemy stosując uproszczoną metodę stycznych, tzn. w punkcie krzywej $y = f(x)$ o odciętej $\varphi(\tilde{y}_i)$ prowadzimy prostą równoległą do stycznej do tej krzywej w punkcie o odciętej $\tilde{y}_i$ (rysunek 2).

Rozpatrzmy metody iteracyjne (6), gdy za metodę iteracyjną (2) przyjmiemy w szczególności metodę Newtona, a więc

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

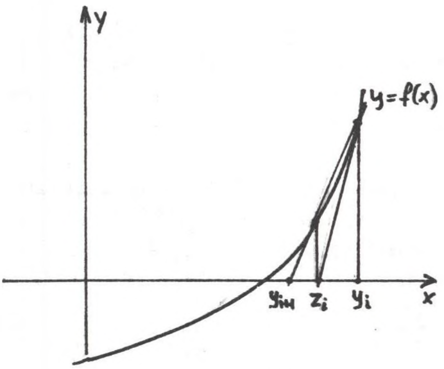
Pierwszą z tych metod można określić następująco:

$$z_i = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}, \quad y_{i+1} = \frac{z_i \cdot f(y_i) - y_i \cdot f(z_i)}{f(y_i) - f(z_i)}; \quad i = 0,1,2,\dots \tag{15}$$

Jej interpretację geometryczną podano na rys. 3. Drugą z metod określają wzory

$$\tilde{z}_i = \tilde{y}_i - \frac{f(\tilde{y}_i)}{f'(\tilde{y}_i)}, \quad \tilde{y}_{i+1} = \tilde{z}_i - \frac{f(\tilde{z}_i)}{f'(\tilde{y}_i)} \quad i = 0,1,2,... \tag{16}$$

Metody iteracyjne określone wzorami (15) i (16) posiadają wykładnik zbieżności równy 3.



Rys. 3

Metoda (15) została szczegółowo zbadana w pracy [2]. Porównamy obecnie wskaźniki efektywności metody Newtona i metod (15) i (16).

Zgodnie z [5] (str. 332) wskaźnik efektywności danej metody iteracyjnej jest równy

$$\mathcal{E} = p^{\frac{1}{\vartheta}} \tag{17}$$

gdzie p jest wykładnikiem zbieżności metody, natomiast ϑ kosztem wykonania jednej iteracji.

Koszt jednej iteracji zależy głównie od tego, ile razy oblicza się wartość funkcji f(x) i jej pochodnych w każdym kroku, a mało zależy od operacji arytmetycznych wykonywanych w funkcji iteracyjnej (por. [5]).

Przyjmijmy koszt obliczenia wartości funkcji f(x) równy 1, a koszt obliczenia pochodnej $f'(x)$ równy γ.

Wskaźnik efektywności metody Newtona wynosi więc

$$\mathcal{E}_1 = 2^{\frac{1}{1+\gamma}},$$

natomiast wskaźnik efektywności metod iteracyjnych określonych wzorami (15) i (16) wynosi

$$\mathcal{E}_2 = 3^{\frac{1}{2+\gamma}}$$

Metody (15) i (16) mają większy wskaźnik efektywności niż metoda Newtona, gdy

$$3^{\frac{1}{2+\gamma}} > 2^{\frac{1}{1+\gamma}},$$

stąd wynika

$$\gamma > \frac{\log \frac{4}{3}}{\log \frac{3}{2}} = 0{,}7092$$

Zatem gdy koszt obliczenia pochodnej $f'(x)$ jest większy niż 0,7092 kosztu obliczenia wartości funkcji $f(x)$, to metody (15) i (16) są lepsze w sensie podanego przez A. Ralstona kryterium (wskaźnika efektywności).

III. W pracach [3] i [4] podano dwa sposoby podwyższania wykładnika zbieżności funkcji iteracyjnej (2) (tzn. konstrukcji na podstawie (2) nowej funkcji iteracyjnej o wykładniku zbieżności równym co najmniej $k+1$), które obecnie podamy.

TWIERDZENIE 3. Jeżeli funkcja iteracyjna (2) posiada wykładnik zbieżności równy k oraz funkcje $\varphi(x)$ i $f(x)$ są klasy $C^{(k+1)}$ w pewnym otoczeniu punktu $x = \alpha$, to funkcje iteracyjne

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{f(x)\varphi'(x)}{k \cdot f'(x)}, \qquad f'(\alpha) \neq 0, \tag{18}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{\varphi(x) - \frac{1}{k}\varphi'(x) \cdot x}{1 - \frac{1}{k} \cdot \varphi'(x)}, \qquad \varphi'(\alpha) \neq k, \tag{19}$$

posiadają wykładnik zbieżności równy co najmniej $k+1$.

Podwyższając wielokrotnie wykładnik zbieżności metody Newtona

$$\tilde{\varphi}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(o wykładniku zbieżności równym 2) według wzoru (18), otrzymujemy metody iteracyjne Schrodera; stosując natomiast do podwyższania wykładnika zbieżności wzór (19), otrzymujemy metody iteracyjne Königa (por. [3], [4]).

Podamy obecnie inny niż w [3] i [4] dowód tw. 3.

D o w ó d. Zauważmy, że

$$\psi(\alpha) = \alpha, \quad \tilde{\psi}(\alpha) = \alpha.$$

Z (18) i (19) otrzymujemy

$$\psi(x) - \alpha = \frac{k \cdot f'(x)\left[\varphi(x) - \alpha\right] - f(x) \cdot \varphi'(x)}{k \cdot f'(x)} \tag{20}$$

$$\tilde{\varphi}(x) - \alpha = \frac{[\varphi(x) - \alpha] - \frac{1}{k}\varphi'(x)(x - \alpha)}{1 - \frac{1}{k}\varphi'(x)} \tag{20}$$

Rozpatrzmy funkcje

$$L(x) = k \cdot f'(x)[\varphi(x) - \alpha] - f(x) \cdot \varphi'(x)$$

$$\tilde{L}(x) = [\varphi(x) - \alpha] - \frac{1}{k} \cdot \varphi'(x)(x - \alpha).$$

Z (4) wynika, że

$$L(\alpha) = L'(\alpha) = \ldots = L^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

$$\tilde{L}(\alpha) = \tilde{L}'(\alpha) = \ldots = \tilde{L}^{(k-1)}(\alpha) = 0.$$

Obliczając k-te pochodne funkcji $L(x)$ i $\tilde{L}(x)$ otrzymujemy (uwzględniając niezerowe czynniki pochodnych)

$$L^{(k)}(\alpha) = \binom{k}{0}k \cdot f'(\alpha)\varphi^{(k)}(\alpha) - \binom{k}{1}f'(\alpha)\varphi^{(k)}(\alpha) = 0,$$

$$\tilde{L}^{(k)}(\alpha) = \varphi^{(k)}(\alpha) - \binom{k}{1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \varphi^{(k)}(\alpha) \cdot 1 = 0.$$

Stąd wobec wzorów (20) mamy

$$\psi'(\alpha) = \ldots = \psi^{(k)}(\alpha) = 0, \quad \tilde{\psi}'(\alpha) = \ldots = \tilde{\psi}^{(k)}(\alpha) = 0.$$

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Pielorz P.: Pewna metoda konstrukcji funkcji iteracyjnych o wysokim rzędzie zbieżności. Zesz. Nauk. Pol. Śl. seria: Mat.-Fiz., w tym zeszycie.

[2] Ostrowski A.M.: Solution of equations and systems of equations, New York 1960.

[3] Bartłomiejczyk R., Przybylak F.: Proste wyprowadzenie i warunki zbieżności metody Schrodera przybliżonego rozwiązywania równań. Zesz.Nauk. Pol. Śl. seria: Mat.-Fiz. z. 21, 1973.

[4] Bosko Jovanovic: A method for obtaing iterative formulas of higher order, МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК, 9 (24), 1972.

[5] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1971.

ДВУТОЧЕЧНЫЕ МЕТОДЫ УВЕЛИЧЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Р е з ю м е

В настоящей работе даны два метода увеличения на единицу показателя сходимости данного метода итераций

$$x = \varphi(x)$$

для уравнения $f(x) = 0$, имеющего корень $x = \alpha$ такой, что $f'(\alpha) \neq 0$.

Согласно [1] эти методы определяются следующими формулами:

$$\psi_0(x) = \frac{\varphi(x) \cdot f(x) - x \cdot f(\varphi(x))}{f(x) - f(\varphi(x))}$$

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - \frac{f(\varphi(x))}{f(x)}.$$

Дана геометрическая интерпретация приведенных итерационных формул для вещественной функции $f(x)$. Рассмотрены частные случаи этих методов, определенных выражением

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{(метод Ньютона)}$$

Приведена сравнительная оценка эфективности показателей сходимости по указанному методу и по методу Ньютона. Приведены другие доказательства обоих методов увеличения показателей сходимости указанных в [3] и [4].

ON ONE TWO-POINT METHODS OF RAISING OF THE ORDER OF ITERATIVE METHODS

S u m m a r y

In this paper there are given two methods of raising on 1 of the order of convergence of the iterative method

$$x = \varphi(x)$$

for an equation $f(x) = 0$, which has a root $x = \alpha$ such that $f'(\alpha) \neq 0$. These methods defined by formulas

$$\psi_0(x) = \frac{\varphi(x) \cdot f(x) - x\, f(\varphi(x))}{f(x) - f(\varphi(x))}$$

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - \frac{f(\varphi(x))}{f'(x)}$$

are obtained on the basis [1]. It is given the geometric interpretation of infroduced iterative methods (in the ease when $f(x)$ is the real function). There are considered the particular cases of these methods when $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (Newton's method).

There is comparison of the index of effectiveness of these functions with the index of effectiveness of Newton's method. It is given also another proof of two methods, which raise the order of convergence of iterative functions contained in [3] and [4].