ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Franciszek PRZYBYLAK

O UOGÓLNIONEJ METODZIE ITERACYJNEJ KÖNIGA

Streszczenie. W pracy tej wyprowadzono wzór na pochodną funkcji iteracyjnej, która to funkcja została podana w pracy [1].

I. W niniejszej pracy zachowamy oznaczenia z [1], a cytowana dalej numeracja podwójna (np. Lemat 3.1) także będzie dotyczyła pozycji [1].

Dla równania

$$f(z) = 0 \tag{1}$$

rozpatrujemy funkcję iteracyjną postaci

$$\Phi = z - a_o \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_{n-i-1} a_o^i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_{n-i} a_o^i}, \tag{2}$$

gdzie $\alpha_o \neq 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \in N)$ są dowolnymi liczbami zespolonymi, zaś $u_o = 1$, $u_1 = a_1$ oraz

$$u_p = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}, \quad p \geqslant 2. \tag{3}$$

W wyznaczniku (3)

$$a_o = f(z), \quad a_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(z), \quad (i = 1\ (1)\ n) \tag{4}$$

W pracy [1] wyprowadzono wzór na pochodną funkcji iteracyjnej (2), gdy $\alpha_o \neq 0$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Funkcja (2) jest wtedy funkcją iteracyjną Königa.

Obecnie wyprowadzimy wzór na pochodną funkcji (2) przy założeniu $\alpha_o \neq 0$.

Zauważmy, że funkcję iteracyjną (2) można przedstawić w postaci

$$\Phi = z - a_o \frac{P_{n-1}}{P_n}, \tag{5}$$

gdzie

$$P_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 & a_o \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \dots & \beta_1 & \beta_o \end{vmatrix} \tag{6}$$

przy czym

$$P_o = \alpha_o; \quad \beta_j = (-1)^j \alpha_j, \quad j = 0\ (1)\ k.$$

Rzeczywiście, rozwijając wyznacznik (6) według ostatniej kolumny otrzymujemy dla $k = n - 1$ i $k = n$ odpowiednio licznik i mianownik wyrażenia (2).

Oznaczmy przez $W_p^{(k)}$ (por. [1] def. 3.2) wyznacznik otrzymany z wyznacznika u_{p+1} przez skreślenie w nim wiersza k i ostatniej kolumny dla $1 \leqslant k < p$, gdy $k > p$ przyjmujemy $W_p^{(k)} = u_p$.

Przyjmując we wzorze (3.8) $n = p$, $t + 1 = p$ otrzymujemy tożsamość

$$W_p^{(p)} = \frac{1}{a_o} (a_1 u_p - u_{p+1}). \tag{7}$$

Analogicznie stosując podstawienia

$$t := n - t, \quad s - 1 := n - i$$

we wzorze (3.7) otrzymujemy

$$u_{n-t}\, u_{n-i} - u_{n+1-i}\, u_{n-t-1} = \begin{cases} a_o^{n-t}\, W_{n-i}^{(t+1-i)} & \text{dla } i \leqslant t \leqslant n \\ 0 & \text{dla } t = i - 1 \\ -a_o^{n+1-i}\, W_{n-t-1}^{(i-1-t)} & \text{dla } 0 \leqslant t < i-1 \end{cases} \tag{8}$$

gdzie

$$u_{-1} = 0, \quad t = 0\ (1)\ n$$

oraz

$$i = 0\ (1)\ n.$$

Do dalszych rozważań wykorzystamy poniższy

Lemat 3.1. Niech

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

gdzie b_{ij} są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Jeżeli B_i $(i = 1\ (1)\ k)$ oznacza wyznacznik utworzony z wyznacznika B przez zastąpienie wiersza i wierszem

$$0,\ d_1 b_{i1},\ d_2 b_{i2}, \ldots, d_{k-1} b_{ik-1},$$

to

$$\sum_{i=1}^{k} B_i = 0.$$

Liczby d_s $(s = 1\ (1)\ k-1)$ są dowolnymi liczbami zespolonymi.

II. Obecnie wykażemy dwa lematy.

Lemat 1. Pochodna wyznacznika (6) (względem zmiennej z) wyraża się wzorem

$$P'_k = \frac{k+1}{a_0}\,(a_1 P_k - \alpha_c\, u_{k+1}) - S_k, \tag{9}$$

gdzie

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\alpha_{i+1}\, u_{k-i}\, a_0^i.$$

D o w ó d. Różniczkujemy wyznacznik P_k według wierszy, korzystając ze związków

$$a'_i = (i+1)\, a_{i+1}, \quad i = 0\ (1)\ k$$

wynikających z (4) i wtedy mamy:

$$P'_k = B_1 + \ldots + B_k,$$

gdzie B_l oznacza wyznacznik jaki otrzymamy po zróżniczkowaniu w P_k wiersza l $(l = 1\ (1)\ k)$.

W każdym z wyznaczników B_l z wyjątkiem ostatniego, od wiersza l odejmujemy wiersz $l+1$ pomnożymy przez $l+1$, wtedy P'_k wyrazi się wzorem:

$$P'_k = -\begin{vmatrix} 0 & 1a_1 & 2a_o & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \ldots & a_1 & a_o \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \ldots & \beta_1 & \beta_o \end{vmatrix} - \ldots - \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{k-1} & 2a_{k-2} & \ldots (k-1) & a_1 & ka_o \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \ldots & a_1 & a_o \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \ldots & \beta_1 & \beta_o \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \ldots & a_o & 0 \\ (k+1)a_{k+1} & ka_k & (k-1)a_{k-1} & \ldots & 2a_2 & a_1 \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \ldots & \beta_1 & \beta_o \end{vmatrix} = B_1 + \ldots + B_{k-1} + B_k .$$

Aby zastosować lemat 3.1 należy dodać i odjąć wyznaczniki B_{k+1} i B_{k+2}, które są równe

$$B_{k+1} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & a_k & 2a_{k-1} & \ldots & (k-1)a_2 & ka_1 \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \ldots & \beta_1 & \beta_o \end{vmatrix},$$

$$B_{k+2} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_o & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_k & a_{k-1} & \dots & a_1 & a_o \\ 0 & \beta_k & \dots & (k-1)\beta_2 & k\beta_1 \end{vmatrix}.$$

Na podstawie lematu 3.1 suma

$$B_1 + B_2 + \dots + B_{k-1} + B_{k+1} + B_{k+2} = 0.$$

Tak więc

$$P'_k = B_k - B_{k+1} - B_{k+2}. \tag{10}$$

Zauważmy dalej, że

$$B_k - B_{k+1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_o & 0 \\ (k+1)a_{k+1} & (k+1)a_k & \dots & (k+1)a_2 & (k+1)a_1 \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \dots & \beta_1 & \beta_o \end{vmatrix}.$$

Rozwijając ten wyznacznik według ostatniej kolumny dostajemy

$$B_k - B_{k+1} = (k+1)\left[\beta_o W_k^{(k)} + \frac{a_1}{a_o}(P_k - \beta_o u_{k+1})\right].$$

Na podstawie tożsamości (7)

$$B_k - B_{k+1} = \frac{k+1}{a_o}(a_1 P_k - \alpha_o u_{k+1}). \tag{11}$$

Po kolejnym rozwijaniu wyznacznika B_{k+2} według ostatniej kolumny jest

$$B_{k+2} = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\alpha_{i+1}\, u_{k-i}\, a_o^i. \tag{12}$$

Wstawiając (11) i (12) do (10) otrzymujemy (9).

<u>Lemat 2</u>. Dla $i = 0\ (1)\ n$ zachodzi tożsamość

$$P_n\, u_{n-i} - P_{n-1}\, u_{n+1-i} =$$

$$= a_o^n \sum_{t=i}^{n} \alpha_t\, W_{n-i}^{(t+1-i)} - \sum_{t=0}^{i-2} \alpha_t\, W_{n-t-1}^{(i-1-t)}\, a_o^{t+1-i} \tag{13}$$

D o w ó d. Ponieważ

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i\, u_{k-i}\, a_o^i,$$

więc

$$P_n\, u_{n-i} - P_{n-1}\, u_{n+1-i} = \sum_{t=0}^{n} \alpha_t (u_{n-t}\, u_{n-i} - u_{n+1-i}\, u_{n-t-1})\, a_o^t.$$

Korzystając w powyższej równości z tożsamości (8) otrzymujemy wzór (13).

TWIERDZENIE. Pochodna funkcji iteracyjnej (2) wyraża się wzorem

$$\Phi' = \frac{a_o^n \sum_{i=0}^{n} \left[(n+1-i)\alpha_i \left(- \sum_{t=0}^{i-2} \alpha_t\, W_{n-t-1}^{(i-1-t)}\, a_o^{t+1} + a_o^i \sum_{t=i}^{n} \alpha_t\, W_{n-i}^{(t+1-i)}\right)\right]}{P_n^2} \tag{14}$$

lub

$$\Phi' = \frac{a_o^n \sum_{i=0}^{n} \sum_{t=0}^{i} a_o^{i-t}\, W_{n-i+z}^{(t+1)} \begin{vmatrix} (n+1-i+t)\alpha_{i-t} & \alpha_{i-1-t} \\ (n-i)\alpha_{i+1} & \alpha_i \end{vmatrix}}{P_n^2}. \tag{15}$$

W powyższym wzorze przyjmujemy $\alpha_{-1} = 0$.

D o w ó d. Z (5) wynika, że

$$\Phi' = \frac{P_n^2 - A + C}{P_n^2}, \tag{16}$$

gdzie

$$A = a_1 P_{n-1} P_n, \quad C = a_o(P_{n-1} P'_n - P'_{n-1} P_n).$$

Korzystając z lematu 1 dla $k=n$ i $k=n-1$ obliczamy wartość wyrażenia C:

$$C = P_{n-1}\left[(n+1)(a_1 P_n - \alpha_o u_{n+1}) - a_o S_n\right] - P_n\left[n(a_1 P_{n-1} - \alpha_o u_n) - a_o S_{n-1}\right] =$$

$$= a_1 P_n P_{n-1} + \alpha_o\left[n u_n P_n - (n+1) u_{n+1} P_{n-1}\right] + a_o(P_n S_{n-1} - P_{n-1} S_n) =$$

$$= A + P_n \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\alpha_i u_{n-i} a_o^i - P_{n-1} \sum_{i=0}^{0} (n+1-i)\alpha_i u_{n+1-i} a_o^i =$$

$$= A - P_n^2 + P_n \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\alpha_i u_{n-i} a_o^i - P_{n-1} \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\alpha_i u_{n+1-i} a_o^i =$$

$$= A - P_n^2 + D.$$

Ponieważ po wstawieniu do wzoru (16) wartości C dwa pierwsze składniki w liczniku się redukują, więc należy obliczyć D.

$$D = P_n \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\alpha_i u_{n-i} a_o^i - P_{n-1} \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\alpha_i u_{n+1-i} a_o^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[(n+1-i)\alpha_i a_o^i (P_n u_{n-i} - P_{n-1} u_{n+1-i})\right].$$

Na podstawie lematu 2 możemy napisać:

$$D = a_o^n \sum_{i=0}^{n} \left[(n+1-i)\alpha_i \left(- \sum_{t=0}^{i-2} \alpha_t W_{n-t-1}^{(i-1-t)} a_o^{t+1} + a_o^i \sum_{t=i}^{n} \alpha_t W_{n-i}^{(t+1-i)}\right)\right].$$

Stąd po wymnożeniu i odpowiednim pogrupowaniu otrzymujemy:

$$D = a_o^n \sum_{i=0}^{n} \sum_{t=0}^{i} a_o^{i-t} W_{n-i+t}^{(t+1)} \begin{vmatrix} (n+1-i+t)\alpha_{i-t} & \alpha_{i-1-t} \\ (n-i)\alpha_{i+1} & \alpha_i \end{vmatrix} .$$

Z podanego twierdzenia wynika, że wykładnik zbieżności funkcji iteracyjnej (2) przy założeniu jednokrotności pierwiastka równania (1) jest równy $n+1$.

Wpłynęło do Redakcji w październiku 1974 r.

LITERATURA

[1] Bartłomiejczyk R., Łanowy St.: Algebraiczna charakteryzacja jednopunktowych wymiernych metod iteracyjnych. Roczniki PTM, seria III, Matematyka Stosowana 3, 1974, s. 35-52,

О ОБОБЩЁННОМ ИТЕРРАЦИОННОМ МЕТОДЕ КЁНИГА

Р е з ю м е

В стате [1] для уравнения

$$f(z) = 0 \tag{1}$$

рассматривается итеррационная функция

$$\Phi = z - a_o \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_{n-i-1} a_o^i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \dot{u}_{n-i} a_o^i}, \tag{2}$$

где $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \in N)$ является произволными комплексными числами а $u_o = 1$, $u_1 = a_1$,

$$u_p = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \quad p \geqslant 2, \tag{3}$$

где в определителе

$$a_o = f(z), \quad a_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(z) \qquad i = 1\ (1)\ n.$$

В [1] показано что функция (2) имеет порядок сходимости n+1.

В настящей работе доказывается, что производная по функции (2) имеет вид

$$\Phi' = \frac{a_o^n \sum_{i=0}^{n} \sum_{t=0}^{i} a_o^{i-t}\, W_{n-i+1}^{(t+1)} \begin{vmatrix} (n+1-i+t)\alpha_{i-t} & \alpha_{i-1+t} \\ (n-i)\alpha_{i+1} & \alpha_i \end{vmatrix}}{\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, u_{n-i}\, a_o^i\right)^2}$$

где $W_p^{(k)}$ означает определитель получающийся из определителя u_{p+1} вычеркиванием к-ой строки и последнего столбца для $1 \leqslant k \leqslant p$, а для $k>p$ читаем $W_p^{(k)} = u_p$.

ON THE GENERALIZED ITERATIVE METHOD OF KÖNIG

S u m m a r y

In the paper [1] it is considerated for the equation

$$f(z) = 0 \tag{1}$$

the following iterative function

$$\Phi = z - a_o \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, u_{n-i-1}\, a_o^i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, u_{n-i}\, a_o^i} \tag{2}$$

where $\alpha_o \neq 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \in N)$ are arbitrary complex, numbers, and $u_o = 1$, $u_1 = a_1$

$$u_p = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_o & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \qquad p \geqslant 2. \tag{3}$$

In this derminant

$$a_o = f(z), \quad a_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}_{(z)} \qquad i = 1\ (1)\ n.$$

In [1] it is proved that the function (2) has an order of convergrence n+1.

In this paper it is deduced that the derivative of the function (2) with respect to a variable z, is given by the formula

$$\Phi' = \frac{a_c^n \sum_{i=0}^{n} \sum_{t=0}^{i} a_o^{i-t} W^{(t+1)}_{n-i+1} \begin{vmatrix} (n+1-i+t)\alpha_{i-t} & \alpha_{i-1+t} \\ (n-i)\alpha_{i+1} & \alpha_i \end{vmatrix}}{\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_{n-i} a_o^i \right)^2}$$

where $W_p^{(k)}$ denotes a determinant obtained from the derminant u_{p+1} by canceling in it the k-th row and the last column for $1 \leqslant k \leqslant p$.

When $k > p$ we put $W_p^{(k)} = u_p$.