ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Janusz CZOPIK

# O ZASTOSOWANIU PROGRAMOWANIA LINIOWEGO DO WYZNACZANIA PARAMETRÓW WZORU EMPIRYCZNEGO

Przypuśćmy, że mamy zadaną tablicę wartości pewnej funkcji

$$y_k = f(x_k, a_1,\dots,a_n) \qquad k = 1(1)N$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_N$ |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... | $y_N$ |

$n < N$

Zakładamy, że znamy postać funkcji $y = f(x, a_1,\dots,a_n)$, nie znamy jednak wartości liczbowych parametrów $(a_1,\dots,a_n)$.
Załóżmy dalej, że wartości $x_k$ są uporządkowane rosnąco

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \dots < x_N$$

oraz przyjmijmy następujące oznaczenia $A = (a_1,\dots,a_n)$

$$f(x, a_1,\dots,a_n) = f(x, A)$$

Przy ustalonym wektorze parametrów $A = (a_1,\dots,a_n)$ można wyznaczyć maksymalne odchylenie dla funkcji $f(x, A)$

$$\max_{k=1(1)N} \left|y_k - f(x_k, A)\right|$$

Oznaczamy

$$\rho = \inf_{\{A \in R^n\}} \max_{k=1(1)N} \left|y_k - f(x_k, A)\right|.$$

Wektor parametrów $A^* = (a_1^*, a_2^*,\dots,a_n^*)$, dla którego osiągnięte jest infimum

$$\max_{k=1(1)N} \left| y_k - f(x_k, A) \right| = \rho$$

nazwiemy optymalnym wektorem parametrów wzoru empirycznego.
Niech

$$\varphi(A) = \max_{k=1(1)N} \left| y_k - f(x_k, A) \right|$$

Jak wiadomo [1], jeżeli dla każdego $k = 1(1)N$ funkcja $f(x_k, A)$ jest funkcją ciągłą zmiennej $A$ w punkcie $(A_o)$, to funkcja $\varphi(A)$ jest ciągła w tym punkcie.
Jeżeli funkcja $f(x, A)$ jest ciągła w $R^{n+1}$ i przy pewnym $A_o \in R_n$ zbiór

$$M(A_o) = \left\{ A \in R^n \;\middle|\; \varphi(A) \leqslant \varphi(A_o) \right\}$$

jest ograniczony, to istnieje punkt, w którym funkcja $\varphi(A)$ osiąga swoje minimum.

W niniejszej pracy rozważymy tylko przypadek, gdy funkcja $f(x, A)$ jest liniowa ze względu na parametry $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Załóżmy, że funkcja $f(x, A)$ ma postać:

$$f(x, A) = \varphi_o(x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) a_i,$$

gdzie funkcje $\varphi_i(x)$ dla $i = 1(1)n$ określone i ciągłe we wspólnym przedziale zawierającym punkty $x_1, \ldots, x_N$.
Niech

$$\rho = \min_{\{A \in R^n\}} \max_{k=1(1)N} \left| y_k - \varphi_o(x_k) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_k) a_i \right| \tag{1}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$b_{ki} = \varphi_i(x_k)$, $b_k = y_k - \varphi_o(x_k)$ dla $i = 1(1)n$, $k = 1(1)N$

$b_{N+j,i} = - b_{ji}$, $b_{N+j} = - b_j$ dla $j = 1(1)N$

Ponieważ $|x| = \max\{x, -x\}$, zatem

$$\max_{k=1(1)N} \left| y_k - \varphi_o(x_k) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_k)\, a_i \right| = \max_{k=1(1)N} \left| \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_i + \varphi_o(x_k) - y_k \right| =$$

$$= \max_{k=1(1)2N} \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_i - b_k \right).$$

Wobec czego (1) można przedstawić w postaci:

$$\rho = \min_{\{A \in R^n\}} \max_{k=1(1)2N} \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_i - b_k \right) = \max_{k=1(1)2N} \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_i^* - b_k \right) \tag{2}$$

Wykażemy, że zagadnienie (2) jest równoważne następującemu zagadnieniu programowania liniowego (patrz także [1] i [2]).

Wprowadźmy nową zmienną $z$.

Zagadnienie (2) jest równoważne zadaniu:

Znaleźć minimum $z$ przy ograniczeniach

$$\eta_k(A) = \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_i - b_k \leqslant z \qquad k = 1(1)2N \tag{3}$$

D o w ó d. Niech punkt $(A_o, z^{(o)}) = (a_1^{(o)}, a_2^{(o)}, \ldots, a_n^{(o)}, z^{(o)})$ będzie rozwiązaniem zadania (3).

Zatem

$$z^{(o)} = \max_{k=1(1)2N} \eta_k(A_o) \geqslant \min_{A} \max_{k=1(1)2N} \eta_k(A) = \rho \tag{4}$$

Z drugiej strony dla punktu $A^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$, który jest rozwiązaniem (2) mamy:

$$\eta_k(A^*) \leqslant \rho \qquad k = 1(1)2N \tag{5}$$

skąd wynika, że

$$A^*, \quad z = \rho$$

spełniają ograniczenia (3) i dlatego $z^{(o)}$ jako minimum przy spełnionych ograniczeniach (3) jest nie większe od $\rho$

$$z^{(o)} \leqslant \rho . \tag{6}$$

Z (4) i (6) widzimy, że $z^{(o)} = \rho$ , zatem spełnione jest (2).
Załóżmy teraz, że $A^*$ spełnia (2), czyli

$$\max_{k=1(1)2N} \eta_k(A^*) = \min_{A} \max_{k=1(1)2N} \eta_k(A) = \rho$$

udowodnimy, że zachodzi (3).
Z (2) wynika:

$$\rho = \max_{k=1(1)2N} \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_i^* - b_k \right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_i^* - b_k, \quad k = 1(1)2N,$$

a więc $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*, \rho)$ jest rozwiązaniem zadania (3) i to rozwiązaniem optymalnym.

Uwaga. Ponieważ większość ośrodków obliczeniowych wyposażonych w komputery posiada programy dla rozwiązywania zadań programowania liniowego, zatem przedstawiona metoda może być łatwo stosowana w praktyce.

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.: Выдение в минимакс. Москва 1972.
[2] Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.: Линейное и выпуклое программирование. Москва 1967.

## О ПРИЛОЖЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

Р е з ю м е

Рассматривается применение линейного программирования для нахождения оптимальных параметров эмпирической формулы, которую задается совокупностсю табличных значений. Предполагается линейность формулы относительно параметров.

## ON THE APPLICATION OF THE LINEAR PROGRAMMING TO DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF AN EMPIRICAL FORMULA

S u m m a r y

This paper presents the application of the linear programming to determination of the optimal parameters of an empirical formula.