ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Jerzy KACZMARSKI

ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE W ZWIĄZKU Z BUDOWĄ SIECI

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie pewnego algorytmu rozwiązania zagadnienia transportowego w danej sieci transportowej.

Zagadnienie transportowe formułuje się tu właściwie na gruncie programowania wypukłego, lecz wykorzystywane macierze i ich specyficzne własności, w pierwszym rzędzie całkowita unimodularność, powodują, że proponowane postępowanie nie nastręcza specjalnych trudności ráchunkowych.

Część I

§ 1. Formalizacja zagadnienia

Niech $G = (U,K)$ będzie grafem niezorientowanym, bez pętli i krawędzi wielokrotnych, w którym $|U| = \alpha^0$, $|K| = \alpha^1$.
Na zbiorze U określona jest funkcja q

$$q : p_i \in U \Rightarrow q_i \in R \tag{I.1.1}$$

spełniająca warunki:

$$\sum_{i=1}^{\alpha^0} q_i = 0 \tag{I.1.2}$$

Na zbiorze ponumerowanych krawędzi grafu G określona jest funkcja c

$$c : k_l \in K \Rightarrow c_l \in R, \quad c_l \geqslant 0 \tag{I.1.3}$$

Graf G z tak określonymi funkcjami c i q nazywać będziemy siecią transportową G.
Krawędziom grafu G nadajmy dowolną orientację i oznaczmy:

K_i^1 - zbiór łuków wychodzących z p_i

K_i^2 - zbiór łuków kończących się w p_i.

Planem przewozów zgodnym z funkcją produkcji i zapotrzebowania q nazywamy każdą funkcję x

$$x : k_l \in K \Rightarrow x_l \in R, \tag{I.1.4}$$

przy czym spełnione są warunki:

$$\sum_{s\in K_i^1} x_s - \sum_{s\in K_i^2} x_s = q_i; \quad i = 1,2,\ldots,\alpha^0 \tag{I.1.5}$$

Przez X oznaczmy zbiór wszystkich planów przewozów zgodnych z daną funkcją - q.
Należy wyznaczyć minimum funkcjonału

$$F : x \in X \Rightarrow \sum_{i=1}^{\alpha^1} c_i \cdot |x_i| \tag{I.1.6}$$

albo inaczej, wyznaczyć minimum formy $\sum_{i=1}^{\alpha^1} c_i \cdot |x_i|$ przy warunkach (I.1.5).

§ 2. Kilka podstawowych pojęć i twierdzeń teorii grafów

DEFINICJA I.2.1. Liczbę $\nu(G) = \alpha^1 - \alpha^0 + p$ nazywamy liczbą cyklomatyczną grafu $G = (U,K)$, gdzie $|U| = \alpha^0$, $|K| = \alpha^1$, a p oznacza liczbę spójnych składowych tego grafu. (*)

Lemat I.2.1. Liczba cyklomatyczna $\nu(G)$ grafu G równa jest maksymalnej ilości cykli niezależnych. (* *)

DEFINICJA I.2.2. Graf zorientowany $G = (U,K)$ (elementami zbioru K są teraz uporządkowane pary wierzchołków, łuki, $k_{ij} = [p_i,p_j]$) nazywamy antysymetrycznym, jeśli zachodzi warunek:

$$[p_i,p_j] \in K \Rightarrow [p_j,p_i] \notin K.$$

DEFINICJA I.2.3. Jeżeli $G = (U,K)$ jest grafem zorientowanym i zbiór jego łuków ponumerowano jednym tylko wskaźnikiem - j-, to wówczas macierz $S = (s_j^i)$; $i = 1,\ldots,$; α^1 $j = 1,\ldots,\alpha^0$, o elementach

(*) - [1] str. 27

(* *)- [1] str. 29

$$s_j^i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } p_i \in u \text{ jest początkiem } k_j \in K \\ -1 & \text{" " " końcem} \\ 0 & \text{" " nie jest ani początkiem, ani końcem łuku } k_j \in K \end{cases}$$

nazywamy macierzą incydencji łuków grafu G.

Lemat I.2.2. Macierz incydencji łuków jest macierzą całkowicie unimodularną. (***)

TWIERDZENIE. (Poincare - Veblen - Alexander) (****)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby wektor $c=(c^1,\ldots,c\ )$ reprezentował cykl lub sumę cykli grafu antysymetrycznego G jest, żeby

$$S\ .\ c = 0 \qquad (I.2.1)$$

Jeżeli liczba cyklomatyczna grafu G wynosi $\nu(G)$, to wówczas bazę przestrzeni rozwiązań układu (I.2.1) można wybrać w ten sposób, że macierz, której kolumnami są wektory tej bazy, będzie postaci:

$$C = \begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}, \qquad (I.2.2)$$

gdzie E jest macierzą jednostkową o wymiarach $\nu(G) \times \nu(G)$ a C macierzą o elementach $c_j^i = 0;\ 1,\ -1$

$$i = \nu(G) + 1,\ldots,\alpha^1;\quad j = 1,\ldots,\nu(G).$$

Macierz C postaci (I.2.2) nosi nazwę macierzy cyklomatycznej lub fundamentalnej macierzy cykli.

Lemat I.2.3. Fundamentalna macierz cykli grafu antysymetrycznego G jest macierzą całkowicie unimodularną. (*)

§ 3. Istnienie planu przewozów zgodnego z funkcją produkcji i zapotrzebowania

Rozważając zagadnienie transportowe można założyć, że graf G jest spójny. Oznacza to, że $\nu(G) = \alpha^1 - \alpha^0 + 1$, a rząd macierzy S równa się $\alpha^1 - \nu(G) = \alpha^0 - 1$, jest więc o jeden mniejszy od liczby wierszy tej macierzy. Uwzględniając wprowadzone w poprzednim paragrafie oznaczania, warunki (I.1.5) można zapisać w postaci:

(***) - [1] str. 137
(****)- [1] str. 142
(*) - [2] lub 5 .

$$S \cdot x = q, \tag{I.3.1}$$

gdzie S jest macierzą incydencji łuków danego grafu, po nadaniu jego krawędziom pewnej orientacji

$$x = (x_1, \dots, x_{\alpha^i}), \quad q = (q_1, \dots, q_{\alpha^o})$$

Ponieważ suma wszystkich wektorów - wierszy macierzy S jest wektorem zerowym, każda kolumna tej macierzy zawiera dokładnie jedną jedynkę i jedną -1 a $\sum_{i=1}^{\alpha^o} q_i = 0$, więc układ (I.3.1) posiada rozwiązania, czyli istnieje plan przewozów zgodny z funkcją produkcji i zapotrzebowania.

§ 4. Wykluczenia Jordana. Całkowita unimodularność macierzy jako niezmiennik wykluczeń Jordana

DEFINICJA (I.4.1). Wykluczeniem Jordana dokonanym nad macierzą A z elementem rozwiązującym $a_l^r \neq 0$ nazywamy przekształcenie tej macierzy w macierz B, której elementy wyznacza się na podstawie wykonywanych w podanej kolejności prawideł: (*)

a) element a_l^r zastąpiony zostaje jedynką,
b) pozostałe elementy l-tej kolumny nie ulegają zmianie,
c) elementy r-tego wiersza zmieniają znaki,
d) miejsce dowolnego innego elementu a_k^i zajmuje liczba $a_k^i \cdot a_l^r - a_j^i \cdot a_k^r$,
e) wszystkie uzyskane w ten sposób wielkości dzielimy przez a_l^r.

Niech dany będzie układ $y_i = \sum_{j=1}^{m} a_j^i x_j$.

Wykluczenie Jordana z elementem rozwiązującym $a_l^r \neq 0$ jest schematem operacji wyznaczania zmiennej x_l z równania

$$y_r = \sum_{j=1}^{m} a_j^r x_j$$

i podstawienie jej do pozostałych równań układu.

TWIERDZENIE (I.4.1). Jeżeli wszystkie formy liniowe układu $y_i = \sum_{j=1}^{m} a_j^i x_j$ $i = i, \dots, n$; są liniowo niezależne, to wykonując dokładnie n odpowied-

(*) - [7] lub [9] str. 10
(**) - [9] str. 13

nich wykluczeń Jordana, można wszystkie zmienne zależne $y_1, \dots, y_n$ przekształcić w zmienne niezależne.(**)

Lemat (I.4.1). Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz A była macierzą całkowicie unimodularną jest, żeby macierz uzyskana z niej przez dowolne wykluczenie Jordana była taką macierzą.

§ 5. Dowolny plan przewozów zgodny z funkcja produkcji i zapotrzebowania. Pierwsze własności

Rozważmy dalej układ (I.3.1)

$$
\begin{array}{l}
a_1^1 \cdot x_1 + \dots + a_1^1 \cdot x_1 = q_1 \\
a_1^2 \cdot x_1 + \dots + a_1^2 \cdot x_1 = q_2 \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots \\
a_1^{\alpha^0} \cdot x_1 + \dots + a_1^{\alpha^0} \cdot x_1 = q_{\alpha^0}
\end{array}
$$

Ponieważ rząd macierzy S równy jest $\alpha^0 - 1$, jeśli przyjąć, że rozważany graf jest spójny, więc można wykonać dokładnie $\alpha^0 - 1$ wykluczeń Jordana i żadne dwa elementy rozwiązujące nie będą należały ani do tego samego wiersza, ani do tej samej kolumny.

Ostateczny rezultat można, pomijając nieistotną zmianę wskaźników, zapisać następująco:

$$
\begin{array}{l}
a_1^1 x_1 + \dots + a^1 \cdot x + a_{+1}^1 q_1 + \dots + a_{\vartheta+\alpha^0-1}^i q_{\alpha^0-1} = x_{\vartheta+1} \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
a_i^{\alpha^0 1} x_1 + \dots + a_{\vartheta}^{\alpha^0-1} x_{\vartheta} + a_{\vartheta+1}^{\alpha^0-1} q_1 + \dots + a_{\vartheta+\alpha^0-1}^{\alpha^0 1} q_{\alpha^0-1} = x_{\vartheta+\alpha^0-1} \\
0 \qquad + \dots + 0 \qquad + a_{\vartheta+1}^{\alpha^0} q_1 + \dots + a_{\vartheta+\alpha^0-1}^{\alpha^0} q_{\alpha^0-1} = q_{\alpha^0}
\end{array}
\tag{I.5.1}
$$

gdzie $\vartheta = \vartheta(G) = \alpha^1 - \alpha^0 + 1$.

Z lematu (I.4.1) wynika, że macierz układu (I.5.1) jest macierzą całkowicie unimodularną, ponieważ w myśl lematu (I.2.2) jest nią macierz incydencji łuków S.

Zauważmy, że jeśli wartości planu przewozów na łukach $k_1, \dots, k_\vartheta$ wybrać dowolnie, to na pozostałych będzie on już ściśle zdeterminowany. Fakt ten ma prostą interpretację geometryczną. Usunięcie z grafu krawędzi $k_1, \dots, k$ (odpowiadającym zmiennym niezależnym $x_1, \dots, x_\vartheta$ występującym w (I.5.1)

(**)– [4].

nie narusza spójności, redukując go do drzewa. Schematycznie dowolny plan przewozów zgodny z funkcją q będziemy zapisywać

$$
\begin{array}{l|cccc|l}
 & x_1 & x_2 & \dots & x & \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \dots & & \dots & & \vdots \\
x_\nu & 0\dots & & \dots & 1 & 0 \\
x_{\nu+1} & a_1^1 & a_2^1 & \dots & a^1 & -b_{\nu+1} \\
x_{\nu+2} & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a^2 & -b_{\nu+2} \\
\vdots & \dots & & \dots & & \vdots \\
x_{\alpha^1} & a_1^{\alpha^0-1} & a_2^{\alpha^0-1} & \dots & a_\nu^{\alpha^0-1} & -b_{\alpha^1}
\end{array}
\tag{I.5.2}
$$

gdzie

$$b_{\nu+i} = - \sum_{j=1}^{\alpha^0-1} a^i_{\nu+j} \cdot q_j$$

§ 6.

Rozważmy przestrzeń wektorową R^ν, do której należą wektory-wiersze macierzy (I.5.2), będące jednocześnie wektorami normalnymi $\nu - 1$ - wymiarowych hiperpłaszczyzn $x_1 = 0,\dots,x_\nu = 0$

$$x_{\nu+i} = \sum_{j=1}^{\nu} a^i_j x_j - b_{\nu+i} = 0 \quad i = 1,2,\dots,\alpha^0 - 1.$$

Wszystkie one zanotowane są w bazie jaką tworzy układ wektorów normalnych hiperpłaszczyzn $x_i = 0$, $i = 1,\dots,\nu$.

Zmiany bazy w przestrzeni R^ν niszczą na ogół specyficzną postać macierzy (I.5.2), która z kilku względów godna jest troski. Można jednak wśród wszystkich baz przestrzeni wyróżnić te, w których macierz utworzona z wektorów normalnych rozważanych hiperpłaszczyzn będzie macierzą całkowicie unimodularną, zawierającą macierz jednostkową o wymiarach $\nu \times \nu$ i które wystarczą do rozstrzygnięcia sformułowanego w pierwszym paragrafie zadania.

W [4] wprowadzono między innymi operację S'_{rl}, której specjalne własności wykorzystamy w dalszych rozważaniach. Jeżeli A jest macierzą o elementach 0,1 lub -1, przy czym $a_l^r \neq 0$, wówczas $S'_{rl}(A) = B'$, gdzie

$$b'_l = a_l$$

$$B' = \begin{cases} \text{jeżeli } a_l^r \cdot a_j^r = 1, & \text{to } b'_j = a_j - a_l \\ \text{jeżeli } a_l^r \cdot a_j^r = -1, & \text{to } b'_j = a_j + a_l \\ \text{jeżeli } a_l^r \cdot a_j^r = 0, & \text{to } b'_j = a_j \end{cases} \qquad (*)$$

(element a_l^r nazywamy rozwiązującym a symbolami a_j i b'_j oznaczono wektor - kolumny odpowiednich macierzy).

TWIERDZENIE (I.6.1). Jeżeli A jest macierzą całkowicie unimodularną o wymiarach $n \times m$, przy czym $\operatorname{rz} A = n$, to macierze $S_{rl}(A)$ oraz $A.B^{-1}$, gdzie B jest macierzą o wymiarach $n \times n$ wyjętą z A, również mają tę cechę. Rozważmy dalej układ wektorów - wierszy macierzy A nie identyfikując go już z samą macierzą. Mnożenie $A \cdot B^{-1}$ możemy wówczas interpretować jako zmianę bazy w R^{ν} na bazę w której ustalony wektor x, o współrzędnych $x_1,\ldots,x_{\nu}$ w starej bazie uzyskuje współrzędne wyrażające się związkami: (* *)

$$(x_1,\ldots,x_n) \cdot B^{-1} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(B^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

W myśl definicji macierzy przejścia stwierdzamy, że w rozpatrywanej sytuacji jest nią macierz B^T. Nową bazę przestrzeni R^{ν} tworzą więc te wektory-wiersze macierzy A, z których zbudowana jest macierz B. Przejście do nowej bazy, a więc mnożenie macierzy A przez macierz B^{-1} można prosto wykonać korzystając z operacji S'. Przypuśćmy, że macierz B zbudowana jest z wierszy o numerach $i_1,\ldots,i_n$. Nieosobliwość macierzy B wskazuje, że nad macierzą A wykonać można kolejno n - operacji S'; $S_{i_1k_1},\ldots,S_{i_nk_n}$.

Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy założyć, że $k_1 = 1,\ldots,k_n = n$ oraz że wszystkie elementy rozwiązujące były jedynkami. Ponieważ wykona-

(*) - [4]
(**) - [4]

nie w macierzy A operacji S równoważne jest z prawostronnym mnożeniem jej przez pewną macierz elementarną a

$$S_{i_n n}\left\{S'_{i_{n-1}}\dots\left[S'_{i_1 1}(B)\right]\right\} = E,$$

więc łatwo zauważyć, że

$$S_{i_n n}\left\{S_{i_{n-1}n-1}\dots S_{i_1 1}|(A)|\right\} = A \cdot B^{-1}.$$

Część II

§ 1. Minimum badanego funkcjonału w przypadku gdy $\nu(G) = 1$

Poszukując efektywnej metody rozwiązania stawianego zagadnienia, przyjrzyjmy się bliżej szczególnej sytuacji, gdy $\nu(G) = 1$ i każdy punkt jest punktem dwukrotnym. Krotnością lub rzędem punktu w grafie nazywamy liczbę krawędzi incydentnych z danym punktem. Wybierzmy dowolny punkt p_o. Jedną z krawędzi mu odpowiadających zorientujmy jako wychodzącą z p_o. Wszystkie pozostałe krawędzie zorientujmy kolejno w ten sposób, aby w każdym punkcie kończył się jeden łuk i z każdego punktu jeden łuk wychodził oraz ponumerujmy je wskaźnikiem $i = 1,\dots,\alpha^1$ (krawędzie o numerach 1 i α^1 są incydentne z punktem p_o).
Każdemu punktowi, z wyjątkiem p_o, przyporządkujemy wskaźnik łuku wchodzącego do danego punktu. Dowolny plan przewozów $x = (x_1, x_2,\dots,x_{\alpha 1})$ zgodny z funkcją produkcji i zapotrzebowania można wówczas wyrazić:

$$x = \left(x_1,\ x_1 + q_1,\dots,x_1 + \sum_{j=1}^{i-1} q_j,\dots,x_1 + \sum_{j=1}^{\alpha^1-1} q_j\right).$$

Postawiony problem sprowadza się do wyznaczenia minimum funkcji

$$F(x_1) = c_1|x_1| + \sum_{i=2}^{\alpha^1} c_i|x_1 - b_i|,$$

gdzie

$$b_i = -\sum_{j=1}^{i-1} q_j.$$

Chcąc uprościć zapis przyjmijmy dodatkowo, że liczby b_i spełniają nierówności $b_2 \leqslant b_3 \ldots \leqslant b_p \leqslant 0 \leqslant \ldots \leqslant b_{\alpha^1-1} \leqslant b_{\alpha^1}$. Aby wyznaczyć wartości zmiennej x_1, dla których funkcja F przyjmuje swoje minimum, wystarczy znaleźć te wartości parametru k, dla których:

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} c_i - \sum_{i=k+1}^{\alpha^1} c_i \right| \leqslant c_K \tag{II.1.1}$$

lub wyznaczyć - k z równoważnego warunku

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha^1} c_i \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{k} c_i \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha^1} c_i \tag{II.1.2}$$

§ 2. Przypadek $\nu(G) > 1$. Twierdzenie podstawowe i kryterium optymalności

Przeprowadzone w I.5 rozważania dowodzą, że aby wyznaczyć minimum funkcjonału

$$F : x \in X \Rightarrow \sum_{i=1}^{\alpha^1} c_i |x_i|$$

wystarczy znaleźć minimum funkcji

$$F(x_1, \ldots, x_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} c_i |x_i| + \sum_{j=\nu+1}^{\alpha^1} c_j \left| \sum_{i=1}^{\nu} a_i^{j-\nu} x_i - b_j \right|$$

Może się zdarzyć, że dla kilku różnych wartości parametru j otrzymaliśmy identyczne formy liniowe, wówczas w badanej funkcji zapiszemy je wraz ze współczynnikiem c równym sumie odpowiednich współczynników.

Ostatecznie:

$$F(x_1, \ldots, x_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} c_i |x_i| + \sum_{j=\nu+1}^{m} c_j \left| \sum_{i=1}^{\nu} a_i^{j-\nu} \cdot x_i - b_j \right| \tag{II.2.1}$$

gdzie

$$m \leqslant \alpha^1.$$

Występujące w (II.2.1) formy liniowe są wierszami macierzy (I.5.2). Badając funkcję (II.2.1) będziemy w tablicy (I.5.2) wykonywać operacje opisane w I.6, zachowujące identyczność wektorów-wierszy i równość współczynników ostatniej kolumny, odpowiadających tym wierszom.

DEFINICJA (II.2.1). $\nu - 1$ - wymiarowe hiperpłaszczyzny $x_i = 0$; $i = 1,\ldots,m$ nazywać będziemy hiperpłaszczyznami granicznymi.
Przez $x_i(P^o) = x_i(x_1^o,\ldots,x_\nu^o)$ oznaczać będziemy uchylenie punktu P^o od hiperpłaszczyzny $x_i = 0$; tzn.

$$x_i(P^o) = x_i^o \qquad \text{dla} \quad i < i \leqslant \nu$$

$$x_j(P^o) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i^{j-\nu} x_i^o - b_j \qquad \text{dla} \quad j > \nu$$

a przez $\beta(P^o)$ - maksymalną liczbę tych liniowo niezależnych hiperpłaszczyzn granicznych $x_i = 0$, dla których $x_i(P^o) = 0$.

TWIERDZENIE (II.2.1). Jeżeli $\beta(P^o) = k < \nu$, to istnieje punkt P taki, że

$$\beta(P') = \nu \quad \text{i} \quad F(P') \leqslant F(P^o).$$

D o w ó d. Twierdzenie (I.6.1) oraz określenie wielkości $\beta(P^o)$ pozwalają założyć, że hiperpłaszczyznami granicznymi spełniającymi warunek $x_i(P^o) = 0$ są hiperpłaszczyzny $x_1 = 0,\ldots,x_k = 0$, $k < \nu$ oraz np. hiperpłaszczyzny $x_{\nu+1} = 0$, $x_{\nu+2} = 0,\ldots,x_{\nu+l} = 0$; $l \geqslant 0$.
Oznacza to, że punkt P^o ma współrzędne $(0,\ldots,0,x_{k+1}^o,\ldots,x_\nu^o)$, gdzie $x_i^o \neq 0$ dla $i \geqslant k+1$, a sama macierz form liniowych jest postaci:

	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	x_{k+1}	$\ldots$	x_ν	
x_1	1	0	$\ldots$	0	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\vdots$
x_k	0	0		1	0		0	0
x_{k+1}	0	0	$\ldots$	0	1	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\vdots$
x_ν	0	0		0	0		1	0
$x_{\nu+1}$	a_1^1	a_2^1	$\ldots$	a_k^1	0	$\ldots$	0	0
$\vdots$	$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\vdots$
$x_{\nu+l}$	a_1^l	a_2^l	$\ldots$	a_k^l	0	$\ldots$	0	0
$x_{\nu+l+1}$	a_1^{l+1}	a^{l+1}	$\ldots$	a_k^{l+1}	a_{k+1}^{l+1}	$\ldots$	a_ν^{l+1}	$-b_{\nu+l+1}$
$\vdots$	$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\vdots$
x_m	a_1^m	a_2^m	$\ldots$	a_k^m	a_{k+1}^m	$\ldots$	a_ν^m	$-b_m$

Przez $F(P_i^o)$ oznaczamy funkcję zmiennej x_i jaką otrzymamy z $F(P)$ podstawiając w miejsce zmiennych $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_\nu$ współrzędne punktu P^o; $x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, x_{i+1}^o, \ldots, x_\nu^o$.
Tak więc

$$F(P_\nu^o) = C + c_\nu |x_\nu| + \sum_{j=\nu+1+1}^{m} c_j |a^{j-\nu} x_\nu - B_j|,$$

gdzie

$$C = \sum_{i=k+1}^{\nu-1} c_i |x_i^o|; \qquad B_j = -\left(\sum_{i=k+1}^{\nu-1} a_i^{j-\nu} x_i^o - b_j\right)$$

Zbiór wszystkich tych wartości zmiennej x_ν, dla których realizuje się minimum funkcji $F(P^o)$, można wskazać w taki sam sposób jak to podano w § 1.

Zauważmy, że w zbiorze tym zawsze istnieje przynajmniej jedna wartość x_ν^1 i przynajmniej jeden wskaźnik $j_o, j_o = \nu$ albo $j_o \geqslant \nu + 1 + 1$ taki, że wektory normalne hiperpłaszczyzn $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0, \quad x_{j_o} = 0$ tworzyć będą układ liniowo niezależny i $x_{j_o}(x_1^o, \ldots, x_{\nu-1}^o, x_\nu^1) = 0$.
Niech P^1 będzie punktem o współrzędnych $x_1^o, \ldots, x_{\nu-1}^o, x_\nu^1$, wówczas: $F(P^o) \geqslant \min\limits_{x_\nu} F(P_\nu^o) = F(P^1)$, a sposób wyboru parametru j_o pozwala stwierdzić, że $\beta(P^1) = k + 1$.
Jeżeli $j_o = \nu$, to możemy przystąpić do następnego etapu rozumowania.

Gdy $j_o \geqslant \nu + 1 + 1$, wybierzmy w R^ν bazę utworzoną przez wektory normalne hiperpłaszczyzn $x_1 = 0, \ldots, x_{\nu-1} = 0, \quad x_{j_o} = 0$ i przesuńmy układ współrzędnych w ten sposób, aby podane hiperpłaszczyzny były ν-1-wymiarowymi hiperpłaszczyznami tego układu.
Przejście do nowej bazy uzyskamy wykonując nad macierzą (II.2.1) operację $S'_{j_o-\nu}$. Aby odpowiednio przesunąć układ współrzędnych wystarczy, jak łatwo zauważyć, pomnożyć ν-tą kolumnę przez b_{j_o} i dodać ją do kolumny wyrazów wolnych, gdy $a^{j_o-\nu} = 1$ lub odjąć, jeśli $a^{j_o-\nu} = -1$.

Nierówność $a^{j_o-\nu} \neq 0$, umożliwiającą wykonanie podanych przekształceń, gwarantują łącznie warunki: $x_{j_o}(P^o) \neq 0$, $\min F(P_\nu^o) = F(P^1)$, $x_{j_o}(P^1) = 0$.

Przejścia do nowego układu współrzędnych, konieczne w podobnych do rozważanej sytuacjach, wykonywane są zwykle za pomocą wykluczeń Jordana. Użycie operacji S, możliwe dzięki całkowitej unimodularności macierzy (II.2.1) i niezmienniczości tej cechy wobec przekształceń S, jest praktycznie dużo wygodniejsze i pozwalające w jakimś sensie na wyznaczanie całych kolumn szukanych macierzy.

Wykonanie podanych czynności umożliwia przejście do następnego etapu rozumowania, w którym szukać będziemy minimum funkcji $F(P^1_{\nu-1})$. Oczywiste jest, że jeśli proces opisany w pierwszym etapie przeprowadzimy jeszcze dokładnie ν-k-1 razy otrzymamy punkt P o własnościach wymienionych w tezie dowodzonego twierdzenia. Możliwość wielokrotnego powtarzania proponowanych operacji i rozumowań wynika oczywiście z własności przekształceń S', zachowujących "postać" macierzy (II.2.1).

Niech Λ będzie zbiorem tych wszystkich elementów przestrzeni R^ν, dla których realizuje się minimum funkcji $F(x_1, \ldots, x_\nu)$,
Oznaczmy

$$\Lambda^* = \{P \in \Lambda \mid \beta(P) = \nu\}.$$

Przy wprowadzonych założeniach zbiór Λ nie jest pusty, więc z twierdzenia (II.2.1) wynika, że $\Lambda^* \neq \emptyset$.
Niech $P^o(x_1^o, \ldots, x_\nu^o) \in \Lambda^*$. Oznacza to, że plan przewozów odpowiadający punktowi P^o przyjmuje co najmniej ν-wartości równych zeru. Otrzymujemy w ten sposób

Wniosek II.2.1. Dla każdego zagadnienia transportowego istnieje taki optymalny plan przewozów, że graf $G = (U,K)$ zbudowany z tych krawędzi, na których funkcja; $x : K_i \Rightarrow x_i \in R$ przyjmuje wartości różne od zera, nie posiada cykli. Jeśli ponadto $P^o \in \Lambda^*$, a liczba hiperpłaszczyzn granicznych incydentnych z P^o wynosi $\nu + p$, to rozkłada się on na p+1 składowych.

Wniosek II.2.2. Jeżeli P^o jest punktem ekstremalnym zbioru Λ, to $P^o \in \Lambda^*$.

Wniosek II.2.3. Wykluczając przypadki trywialne można dowieść, że Λ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, stanowi więc powłokę wypukłą rozciągniętą na swoich punktach ekstremalnych, a na mocy wniosku (II.2.2) można go traktować jako powłokę wypukłą rozciągniętą na zbiorze Λ^*.
Z całkowitej unimodularności macierzy (II.2.1) wynika

Wniosek II.2.4. Jeżeli funkcja $q : p_i \in U \Rightarrow q_i \in R$ przyjmuje wartości całkowite, to współrzędne dowolnego punktu $P^o \in \Lambda^*$ są liczbami całkowitymi.

Jeżeli $\beta(P^o) = \nu$, to istnieje przynajmniej jeden układ współrzędnych, którego ν-1-wymiarowymi hiperpłaszczyznami są hiperpłaszczyzny graniczne incydentne z P^o. Każdy taki układ nazywać będziemy odpowiadającym punktowi P^o.

TWIERDZENIE II.2.2. $\min\limits_{P \in R} F(P) = F(P^o)$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym układzie odpowiadającym punktowi P^o zachodzi:

$$\min_{x_i} F(P_i^o) = F(P^o)$$

Ponieważ konieczność tego warunku nie nastręcza żadnych wątpliwości, będziemy badać jego wystarczalność. Z uwagi na wypukłość funkcji $F(P)$, wystarczy pokazać, że jeśli w każdym układzie odpowiadającym punktowi P^o, $\min\limits_{x_i} F(P_i^o) = F(P^o)$, to istnieje takie otoczenie punktu P^o, $\Delta(P^o)$, że dla każdego $P \in \Delta(P^o)$, $F(P) \geqslant F(P^o)$. Dowód przeprowadzimy w dwóch przypadkach

1) istnieje dokładnie jeden układ odpowiadający P^o,
2) liczba hiperpłaszczyzn $x_i = 0$, dla których $x_i(P^o) = 0$ równa jest $+s$ $s > 0$.

Załóżmy, że przyjęty w R układ współrzędnych jest układem odpowiadającym punktowi P^o, a więc punkt ten ma współrzędne $(0, \ldots, 0)$.

1) Niech $\Delta(P^o) = \left\{P \in R^{\vartheta} \,\middle|\, \sum\limits_{i=1} x_i^2 \leqslant (\varepsilon)^2\right\}$,

gdzie

$$\varepsilon = \frac{\min\limits_j |b_j|}{2\max\limits_j \sqrt{\sum\limits_{i=1} (a_i^{j-\vartheta})^2}}$$

$$F(P_i^o) = c_i|x_i| + \sum_{j=\ +1}^{m} c_j |a_i^{j-\vartheta} x_i - b_j|, \ b_j \neq 0.$$

Jeżeli $P' \in \Delta(P^o)$, to

$$F(P_i') = C_i + c_i|x_i| + \sum_{j=\vartheta+1}^{m} c_j |a_i^{j-\vartheta} x_i - B_{ji}|,$$

gdzie:

$$C_i = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leqslant \vartheta}} c_k |x_k'|, \qquad B_{ji} = -\Big(\sum_{\substack{k \neq i \\ k \leqslant \vartheta}} a_k^{j-\vartheta} x_k - b_j\Big)$$

i przyjęte założenia powodują, że dla każdej pary wskaźników

$$i,j; \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu, \quad \nu + 1 \leqslant j \leqslant m, \quad B_{ji} \neq 0$$

Niech bowiem $B_{j_o i_o} = 0$. Oznacza to, że punkt P^1 o współrzędnych $(x_1^1, \ldots, x_{i_o-1}^1, 0, x_{i_o+1}^1, \ldots, x_\nu^1) \in \Delta(P^o)$ leży na hiperpłaszczyźnie $x_{j_o} = \sum_{i=1}^{\nu} a_i^{j_o-\nu} x_i - b_{j_o} = 0$. Stąd wynika, że $|\overrightarrow{P^o P^1}| \geqslant \frac{|b_{j_o}|}{\sqrt{\sum_{i=1} (a_i^{j-\nu})^2}} \geqslant 2\varepsilon$, a to przeczy przynależności punktu P^1 do $\Delta(P^o)$.

Skoro jednak $P' \in \Delta(P^o)$, to $x_j(P^o) x_j(P') > 0$, $j > \nu$, a ponieważ punkt $P^1 \in \Delta(P^o)$ i $x_j(P^1) = -B_{ji} \neq 0$; $x_j(P^o) = -b_j \neq 0$, otrzymujemy

$$\text{dla } b_j > 0 \qquad B_{ji} > 0$$

$$\text{dla } b_j < 0 \qquad B_{ji} < 0,$$

skąd na mocy założenia $\min_{x_i} F(P_i^o) = F(P^o)$, po uwzględnieniu wzorów (II.1.1) czy (II.1.2) wynika równość:

$$\min_{x_i} F(P_i') = F(P^1)$$

przy dowolnie wybranym, ustalonym i. Dokonując kolejno $\nu-2$ podobnych iteracji, ze względu na pozostałe zmienne, otrzymamy ciąg punktów $P^1, \ldots, P^{\nu-1}$, $P^k \in \Delta(P^o)$ takich, że

$$F(P^{\nu-1}) \leqslant F(P^{\nu-2}) \leqslant \ldots \leqslant F(P^1).$$

Punkt $P^{\nu-1}$ ma co najwyżej jedną, powiedzmy x_s, różną od zera współrzędną. Ponieważ jednak

$$\min_{x_s} F(P_s^{\nu-1}) = \min_{x_s} F(P_s^o) = F(P^o),$$

więc $F(P') \geqslant F(P^o)$.

2) Niech dla $j = \nu+1, \nu+2, \ldots, \nu+s$, $x_j(P^o) = 0$ i przyjęty układ współrzędnych jest jednym z układów odpowiadających punktowi P^o oraz

$$\Delta(P^o) = \left\{ P \in R \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\nu} (x_i)^2 \leqslant (\varepsilon)^2 \right\},$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{\min\limits_j |b_j|}{3\sqrt{\nu}\,\max\limits_j \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\nu} (a_i^{j-\nu})^2}}$$

Jeżeli $P'(x'_1, \ldots, x'_\nu) \in \Delta(P^o)$, to funkcje $F(P_i^o)$, $F(P'_i)$ można teraz zapisać w postaci

$$F(P_i^o) = c_i|x_i| + \sum_{k=\nu+1}^{\nu+s} c_k|a_i^{k-\nu}x_i| + \sum_{j=\nu+s+1}^{m} c_j|a_i^{j-\nu}x_i - b_j|; \quad b_j \neq 0$$

$$F(P_i^1) = C_i + c_i|x_i| + \sum_{k=\nu+1}^{\nu+s} c_k|a_i^{k-\nu}x_i - B_{ki}| + \sum_{k=\nu+s+1}^{m} c_j|a_i^{j-\nu}x_i - B_{ji}|,$$

gdzie

$$C_i = \sum_{\substack{l=i \\ l\leqslant\nu}} c_l|x'_l|, \quad B_{ki} = -\Big(\sum_{\substack{r=1 \\ r\leqslant\nu}} a_r^{k-\nu}x'_r\Big), \quad \nu+1 \leqslant k \leqslant \nu+s$$

$$B_{ji} = -\Big(\sum_{\substack{r\neq i \\ r\leqslant\nu}} a_r^{j-\nu}x'_r - b_j\Big), \quad \nu+s+1 \leqslant j \leqslant m.$$

Zauważmy, że jeśli tylko $P' \in \Delta(P^o)$, to dla każdych ustalonych; $\nu+1 \leqslant k \leqslant \nu+s$ $\nu+s+i \leqslant j \leqslant m$ zachodzi warunek: $|B_{ki}| < |B_{ji}|$. B_{ki} - jest uchyleniem punktu $(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, 0, x'_{i+1}, \ldots, x'_\nu)$ od hiperpłaszczyzny $x_k = 0$ incydentnej z początkiem układu współrzędnych, czyli z P^o, B_{ji} - jest uchyleniem tego punktu od hiperpłaszczyzny $x_j = 0$, do której punkt P^o nie należy. Wybierzmy dowolną parę wskaźników; $\nu+1 \leqslant k_o \leqslant \nu+s$, $\nu+s+1 \leqslant j_o \leqslant m$ i przyjmijmy oznaczenia

d - odległość punktu $(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, 0, x'_{i+1}, \ldots, x'_\nu)$ od hiperpłaszczyzny $x_{k_o} = 0$

d - odległość tego punktu od $x_{j_o} = 0$

d_1- odległość zbioru $\Delta(P^o)$ od hiperpłaszczyzny $x_{j_o} = 0$

i zauważmy, że skoro macierz (II.2.1) jest całkowicie unimodularna, więc wektory normalne hiperpłaszczyzn granicznych mają w myśl twierdzenia I.6.1, w każdym układzie przez nas wykorzystywanym, współrzędne 0; 1; -1. Długość każdego takiego wektora nie może więc przekraczać $\sqrt{\nu}$.

$$|B_{k_o i}| = d\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (a_i^{k_o-\nu})^2} \leqslant d\sqrt{\nu} \leqslant \varepsilon\sqrt{\nu}$$

$$|B_{j_o i}| = d^*\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (a_i^{j_o-\nu})^2} \geqslant d^* \geqslant d_1 = \frac{|b_{j_o}|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (a_i^{j_o-\nu})^2}} - \varepsilon \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\min_j b_j}{\max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (a_i^{j-\nu})^2}} - \varepsilon = 3\varepsilon\sqrt{\nu} - \varepsilon = \varepsilon(3\sqrt{\varepsilon} - 1)$$

Otrzymane związki uzasadniają nierówność $|B_{k_o i}| < |B_{j_o i}|$.

Warunek ten gwarantuje, że $\min_{x_i} F(P_i^o)$ osiągane będzie w punkcie leżącym na hiperpłaszczyźnie incydentnej z P^o, co wobec założenia $\min_{x_i} F(P_i^o) = F(P^o)$, w każdym układzie odpowiadającym punktowi P^o, pozwala przyjąć, że będzie ono realizowane w punkcie leżącym na hiperpłaszczyźnie $x_i = 0$ należącej do układu, w którym zapisana jest funkcja $F(P)$. Dalszy ciąg rozumowania - identyczny jak poprzednio - pomijam.

§ 3. Algorytm

Jeżeli punkt P^o jest poc.ątkiem przyjętego układu współrzędnych, oznaczmy

$$z_i = \min_{x_i} F(P^o), \qquad 1 < i < \nu$$

$$z_o = \mathrm{mun}\{z_1, \ldots, z_\nu\}$$

Gdy $z_o = F(P^o)$ i przyjęty układ współrzędnych jest jedynym układem odpowiadającym punktowi P^o, to $P^o(0, \ldots, 0)$ jest, w myśl twierdzenia (II.2.2) punktem, w którym realizuje się min $F(P)$.

Gdy punktowi P^o odpowiada kilka układów współrzędnych, to w każdym z nich należy przeprowadzić identyczne badania. Jeżeli $z_o \neq F(P^o)$, oznacza to, że $\min F(P_i^o) \neq F(P^o)$ dla pewnego ustalonego i.Hiperpłaszczyznę graniczną $x_j = 0$, na której leży punkt realizujący minimum funkcji $F(P_i^o)$ oznaczmy dla wygody $x_{j_i} = 0$.

Jeżeli

$$z_o = z_i = F(x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, \frac{b_{j_i}}{a_i^{j_i-\nu}}, x_{i+1}^o, \ldots, x_\nu^o),$$

gdzie

$$b_{j_i} \neq 0 \quad i \quad a_i^{j_i-\nu} = 0,$$

to za nowy układ współrzędnych przyjmijmy układ, którego hiperpłaszczyzna mi są hiperpłaszczyzny $x_1 = 0, \ldots, x_{i-1} = 0, x_{j_i} = 0, x_{i+1}=0,\ldots,x_\nu = 0$.

Łatwo zauważyć, że hiperpłaszczyzny te mogą tworzyć nowy układ współrzędnych. Punkt $P^1(0, \ldots, 0)$ - w nowym układzie - spełniający warunek $F(P^o) > F(P^1)$ poddajmy identycznej analizie.

Zbieżność wskazanego algorytmu jest oczywista a trywialne oszacowanie liczby kroków daje liczba drzew w danym grafie.

Wpłynęło do Redakcji w listopadzie 1974 r.

LITERATURA

[1] Berge C.: Théorie des graphes et ses applications. Paris 1967.

[2] Belevitch V.: On the realizability of graphes with circuit matrices. W "Switching Theory in Space Technology". 126-144, 1963.

[3] Гольштейн Е.Г.; Юдин Д.Б.: Новые направления в линейном програмировании Москва 1966.

[4] Kaczmarski J.: Uwagi o całkowitej unimodularności macierzy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz., z. 15, 1970.

[5] Kaczmarski J.: O całkowitej unimodularności macierzy cyklomatycznej grafów antysymetrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz., z. 15. 1970.

[6] Kruskal I.B.: On the spanning subtree of a graph. Proc. A.M.S., 7, 1956.

[7] Stiefel E.: Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation. Num. Math. 2, 1960.

[8] Wilkov R.S.: A simple proof of the unimodular property for the basic loop matrix. Proc. I.E.E.E. 55, 1967.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В СВЯЗИ С КОНСТРУКЦИЕЙ СЕТИ

Р е з ю м е

В работе представляется некоторый алгоритм, обусловленный свойствами графов для нахождения оптимального решения транспортной задачи.

THE PROBLEMS OF THE FLOWS IN TRANSPORT NETS

S u m m a r y

There in the article it is shown basing on the properties of the graphs one algorithm fixing the maximum flow in nets.