

Jerzy KACZMARSKI

## O STABILNOŚCI ROZWIĄZAŃ ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO

Streszczenie. Artykuł poświęcony jest badaniom warunków stabilności rozwiązań danego zagadnienia transportowego przy użyciu metod opisanych w pracy: "Zagadnienie transportowe w związku z budową sieci. Część I i II".

Część III. Stabilność rozwiązań1. Oznaczenia i pierwsze uwagi

Ponieważ bardzo często będziemy zmuszeni korzystać z oznaczeń i faktów wprowadzonych w [1], dlatego zachowujemy ciągłą numerację nowo formułowanych twierdzeń i pojęć, zgodną z numeracją używaną w wyżej wspomnianej pracy. Odwołując się do wzoru czy twierdzenia z niej zaczerpniętego podawać jedynie numer pod jakim tam występuje.

Przyjmijmy więc, że dla danej sieci transportowej  $G = (X, U)$ , minimum funkcjonału

$$F: x \in X \Rightarrow \sum_{i=1}^{\alpha} c_i |x_i|$$

uzyskuje się dla  $x_1 = x_2 = \dots = x_{\alpha} = 0$  ( $\alpha$  - oznacza, tak jak poprzednio liczbę cykloatyczną grafu  $G$ ) i hiperpłaszczyzny  $x_1 = 0, \dots, x_{\alpha} = 0$  są jedynymi hiperpłaszczyznami incydentnymi z punktem  $P^0(0, \dots, 0)$ , co oznacza, że w macierzy II.2.1 parametr  $l = 0$ .

Niech  $\bar{q} : p_i \Rightarrow q_i + \delta_i$  będzie funkcją spełniającą warunek I.1.2. Ponieważ funkcja  $q$  także spełnia ten warunek, więc funkcja  $\bar{q}$  będzie go spełniała wtedy i tylko wtedy, gdy:  $\sum_{i=1}^{\alpha} \delta_i = 0$ . Celem obecnych rozważań będzie opisanie zbioru tych wartości parametrów  $\delta_i$ , dla których minimum funkcji  $F(P)$  otrzymanej z  $F(P)$  po uwzględnieniu funkcji  $q$  osiągnane będzie w wyznaczonym uprzednio punkcie.

Ogół dostępnych informacji zawiera powstająca z macierzy I.5.1, po podstawieniu do niej w miejsce  $q_i$  wielkości  $q_i + \delta_i$ , tablica:

		$x_1$	$x_2$	... $x_\nu$	$\delta_1$	$\delta_2$	... $\delta_{\alpha^0-1}$	
$c_1$	$x_1$	1	0	... 0	0	0	... 0	0
$c_2$	$x_2$	0	1	... 0	0	0	... 0	0
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...	$\vdots$
$c_\nu$	$x_\nu$	0	0	... 1	0	0	... 0	0
$c_{\nu+1}$	$x_{\nu+1}$	$a_1^1$	$a_2^1$	... $a_\nu^1$	$a_{\nu+1}^1$	$a_{\nu+2}^1$	... $a_{\nu+\alpha^0-1}^1$	$-b_{\nu+1}$ (III.1.1)
$c_{\nu+2}$	$x_{\nu+2}$	$a_1^2$	$a_2^2$	... $a_\nu^2$	$a_{\nu+1}^2$	$a_{\nu+2}^2$	... $a_{\nu+\alpha^0-1}^2$	$-b_{\nu+2}$
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...	$\vdots$
$c_{\nu+\alpha^0-1}$	$x_{\nu+\alpha^0-1}$	$a_1^{\alpha^0-1}$	$a_2^{\alpha^0-1}$	... $a_\nu^{\alpha^0-1}$	$a_{\nu+1}^{\alpha^0-1}$	$a_{\nu+2}^{\alpha^0-1}$	... $a_{\nu+\alpha^0-1}^{\alpha^0-1}$	$-b_{\nu+\alpha^0-1}$

Oznaczmy

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_\nu^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_\nu^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{\alpha^0-1} & a_2^{\alpha^0-1} & \dots & a_\nu^{\alpha^0-1} \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{\nu+1}^1 & a_{\nu+2}^1 & \dots & a_{\nu+\alpha^0-1}^1 \\ a_{\nu+1}^2 & a_{\nu+2}^2 & \dots & a_{\nu+\alpha^0-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu+1}^{\alpha^0-1} & a_{\nu+2}^{\alpha^0-1} & \dots & a_{\nu+\alpha^0-1}^{\alpha^0-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} E & C \\ A^* & \bar{A} \end{pmatrix},$$

gdzie  $E$  jest macierzą jednostkową o wymiarach  $\nu \times \nu$ , a  $C$  - macierzą zerową  $\nu \times (\alpha^0-1)$ .

$$\bar{c} = (c_1, \dots, c_\nu)$$

$$\underline{c}^* = (c_{\nu+1}^*, \dots, c_{\nu+\alpha^0-1}^*)$$

$$c^* = (c_1^*, \dots, c_{\alpha^0-1}^*), \quad \text{gdzie } |c_k^*| = c_{\nu+k}^1 \quad k \leq \alpha^0-1.$$

$\|c^* A^*\|$  niech oznacza wektor o współrzędnych równych bezwzględny wartościom odpowiednich współrzędnych wektora  $c^+ A^+$ , czyli

$$\|c^* A^*\| = \left( \left| \sum_{i=1}^{\alpha^0-1} c_i^* \cdot a_i^1 \right|, \dots, \left| \sum_{i=1}^{\alpha^0-1} c_i^* \cdot a_i^j \right| \right)$$

$$\Delta^* = \{c^* \|c^* A^*\| \leq \bar{c}\}$$

gdzie nierówność  $\|c^* A^*\| \leq \bar{c}$  oznacza, że każda współrzędna wektora  $\|c^* A^*\|$  jest równa lub mniejsza od odpowiedniej współrzędnej wektora  $\bar{c}$ .

Ustalone elementy zbioru  $\Delta^*$  oznaczamy będziemy symbolami;

$$c^* = (c_1^*, \dots, c_{\alpha^0-1}^*), \quad c^* = (c_1^*, \dots, c_{\alpha^0-1}^*) \text{ itd.}$$

W celu uproszczenia zapisu przyjmijmy dalej, że  $b_j > 0$  dla  $j = \nu+1, \dots, \nu + \alpha^0-1$ . Do sytuacji takiej można zawsze doprowadzić mnożąc przez  $-1$  te wiersze tablicy III.1.1 wraz z kolumną wyrazów wolnych, dla których  $b_j < 0$  i zmieniając na przeciwną przyjętą uprzednio orientację odpowiadających mnożym wierszom krawędzie grafu G.

#### Lemat III.1.1

- a) macierz A jest macierzą całkowicie unimodularną,  
b) macierz  $\bar{A}$  jest macierzą nieosobliwą.

a) Macierz  $(A^* \bar{A})$  jest macierzą wyjętą z całkowicie unimodularnej macierzy układu (I.5.1). Jest więc macierzą całkowicie unimodularną, a dopisanie do niej bloku postaci  $(E \ 0)$  nie może zniszczyć tej własności.

b) Teza ta wynika bezpośrednio z faktu, że macierz  $\bar{A}$  jest macierzą odwrotną do macierzy

$$\begin{matrix} s_{\nu+1}^1 & \dots & s_{\alpha^0}^1 \\ & \dots & \\ s_{\nu+1}^{\alpha^0} & \dots & s_{\alpha^0}^{\alpha^0} \end{matrix}$$

wyjętej z macierzy incydencji łuków danego grafu.

Lemat III.1.2. Wymagane algorytmem przekształcenia układu współrzędnych zmuszają do wykonywania w macierzy A operacji sformułowanych w I.6, zachowujących postać macierzy A, tzn. po każdym omawianym przekształceniu uzyskuje się macierz całkowicie unimodularną zawierającą blok:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & & \dots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

o wymiarach  $\nu \times (\nu + \alpha^0 - 1)$ .

Lemat III.1.3. Zbiór  $\Delta^*$  nie jest pusty, gdyż wektor  $\underline{c} \in \Delta^*$ .

D o w ó d. Ponieważ:

$$F(P_1^0) = c_1 |x_1| + \sum_{s=1}^{\alpha_0-1} c_{\nu+s} |a_1^s x_1 - b_{\nu+s}|,$$

więc zakładając dodatkowo, że np.:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= a_1^2 = \dots = a_1^k = 0 \\ a_1^{k+1} &= a_1^{k+2} = \dots = a_1^1 = -1 \\ a_1^{1+1} &= a_1^{1+2} = \dots + \varepsilon_1^{\alpha_0-1} = 1 \end{aligned}$$

możemy napisać

$$F(P_1^0) = C + c_1 |x_1| + \sum_{s=k+1}^1 c_{\nu+s} |x_1 + b_{\nu+s}| + \sum_{s=1+1}^{\alpha_0-1} c_{\nu+s} |x_1 - b_{\nu+s}|,$$

gdzie

$$C = \sum_{s=1}^k c_{\nu+s} |b_{\nu+s}|.$$

Warunek:  $\min_{x_1} F(P_1^0) = F(0, \dots, 0)$   $i = 1, \dots, \nu$ , przy założeniu  $b_j > 0$   
 $j = \nu + 1, \dots, \nu + \alpha_0 - 1$ ; oznacza, że

$$\left| \sum_{s=k+1}^1 c_{\nu+s} - \sum_{s=1+1}^{\alpha_0-1} c_{\nu+s} \right| \leq c_1$$

lecz

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{s=k+1}^1 c_{\nu+s} - \sum_{s=1+1}^{\alpha_0-1} c_{\nu+s} \right| = \left| - \sum_{s=k+1}^1 c_{\nu+s} + \sum_{s=1+1}^{\alpha_0-1} c_{\nu+s} \right| = \\ & = \left| \sum_{s=1}^k c_{\nu+s} a_1^s + \sum_{s=k+1}^1 c_{\nu+s} a_1^s + \sum_{s=1+1}^{\alpha_0-1} c_{\nu+s} a_1^s \right| = \left| \sum_{s=1}^{\alpha_0-1} c_{\nu+s} a_1^s \right|, \end{aligned}$$

więc dla danego

$$\left| \sum_{s=1}^{\alpha^0-1} c_{\nu+s} a_i^s \right| \leq c_i,$$

co dowodzi tezy twierdzenia.

Wprost z określenia zbioru  $\Delta^*$  wynika

Lemat III.1.4.  $c^* \in \Delta^* \rightarrow -c^* \in \Delta^*$ , gdzie  $-c^*$  oznacza wektor przeciwny do wektora  $c^*$ .

Lemat III.1.5. Jeżeli  $c^* \in \Delta^*$ , to

$$\min_{P \in R^{\nu}} F^*(P) = \min_{(x_1, \dots, x_{\nu})} \left( \sum_{i=1}^{\nu} c_i |x_i| + \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\alpha^0-1} c_j \left| \sum_{i=1}^{\nu} a_i^{j-\nu} x_i - b_j^* \right| \right) = F^*(0, \dots, 0),$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_j^* &= b_j, & \text{gdzy} & c_j^* = c_{\nu+j} \\ b_j^* &= -b_j, & \text{gdzy} & c_j^* = -c_{\nu+j}, \quad i < j < \alpha^0-1. \end{aligned}$$

W przypadku gdy  $c^* = \underline{c}$ , teza jest oczywista - niech więc  $c^* \neq \underline{c}$ . W celu uproszczenia zapisu przyjmijmy dodatkowo, że:

$$\begin{aligned} a_i^1 &= \dots = a_i^{k_1} = \dots = a_i^k = 0 \\ a_i^{k+1} &= \dots = a_i^{l_1} = \dots = a_i^1 = -1 \\ a_i^{l+1} &= \dots = a_i^{l_2} = \dots = a_i^{\alpha^0-1} = 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} c_1^* &= -c_{\nu+1}, & c_2^* &= -c_{\nu+2}, & \dots, & c_{k_1}^* &= -c_{\nu+k_1} \\ c_{k_1+1}^* &= c_{\nu+k_1+1}, & c_{k_1+2}^* &= c_{\nu+k_1+2}, & \dots, & c_k^* &= c_{\nu+k} \\ c_{k+1}^* &= -c_{\nu+k+1}, & c_{k+2}^* &= -c_{\nu+k+2}, & \dots, & c_{l_1}^* &= -c_{\nu+l_1} \\ c_{l_1+1}^* &= c_{\nu+l_1+1}, & c_{l_1+2}^* &= c_{\nu+l_1+2}, & \dots, & c_{l_1}^* &= c_{\nu+l_1} \\ c_{l_1+1}^* &= c_{\nu+l_1+1}, & c_{l_1+2}^* &= -c_{\nu+l_1+2}, & \dots, & c_{l_2}^* &= c_{\nu+l_2} \\ c_{l_2+1}^* &= c_{\nu+l_2+1}, & c_{l_2+2}^* &= c_{\nu+l_2+2}, & \dots, & c_{\alpha^0-1}^* &= c_{\nu+\alpha^0-1} \end{aligned}$$

dla dowolnie ustalonego  $i$ .

Uwzględniając powyższe warunki, otrzymamy

$$\begin{aligned} \min_{x_i} F^*(P_i^0) &= \min_{x_i} (C + c_i |x_i| + \sum_{j=k+1}^{l_1} c_{v+j} |x_i - b_{v+j}| + \\ &+ \sum_{j=l_1+1}^1 c_{v+j} |x_i + b_{v+j}| + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} c_{v+j} |x_i + b_{v+j}| + \sum_{j=l_2+1}^{\alpha^0-1} c_{v+j} |x_i - b_{v+j}|), \end{aligned}$$

lecz  $\min_{x_i} F^*(P_i^0) = F^*(P^0)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left| \left( \sum_{j=l_1+1}^1 c_{v+j} + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} c_{v+j} \right) - \left( \sum_{j=k+1}^{l_1} c_{v+j} + \sum_{k=l_2+1}^{\alpha^0-1} c_{v+j} \right) \right| \leq c_i.$$

Ponieważ jednak

$$\begin{aligned} (c_1^*, \dots, c_{\alpha^0-1}^*) \cdot (a_i^1, \dots, a_i^{\alpha^0-1}) &= \sum_{j=1}^{\alpha^0-1} c_j^* \cdot a_i^j = \\ &= - \left[ \left( \sum_{j=l_1+1}^1 c_{v+j} + \sum_{j=l_1+1}^{l_2} c_{v+j} \right) - \left( \sum_{j=k+1}^{l_1} c_{v+j} + \sum_{j=l_2+1}^{\alpha^0-1} c_{v+j} \right) \right] \end{aligned}$$

a w myśl założenia

$$\left| \sum_{j=1}^{\alpha^0-1} c_j^* \cdot a_i^j \right| \leq c_i,$$

więc żądany warunek jest rzeczywiście spełniony.

## § 2. Zasadnicze twierdzenie o stabilności

Niech  $R^{\alpha^0}$  będzie przestrzenią wektorową o elementach  $Q(\delta_1, \dots, \delta_{\alpha^0-1}, \delta_{\alpha^0})$ . Ustalone punkty tej przestrzeni oznaczać będziemy:  $Q^0(\delta_1^0, \dots, \delta_{\alpha^0-1}^0, \delta_{\alpha^0}^0)$ ,  $Q^1(\delta_1^1, \dots, \delta_{\alpha^0-1}^1, \delta_{\alpha^0}^1)$ , itd.

Funkcje:

$$\bar{q} : p_i \in U \Rightarrow q_i + \delta_i,$$

gdzie

$$\sum_{i=1}^{\alpha^0} \delta_i = 0$$

$$\bar{F}(F) = \sum_{i=1}^{\nu} c_i |x_i| + \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\alpha^0-1} c_j \left| \sum_{i=1}^{\nu} a_i^{j-\nu} x_i - \bar{b}_j \right|,$$

gdzie

$$\bar{b}_j = - \left( \sum_{s=1}^{\alpha^0-1} a_{\nu+s}^{j-\nu} - b_j \right)$$

nazywać będziemy indukowanymi przez  $Q$ .

Mówiąc o ustalonym punkcie  $Q^0$  czy  $Q^1$  funkcje indukowane oznaczymy dodatkowo wskaźnikiem punktu np.  $\bar{c}^0, \bar{F}^0, \bar{q}^1, \bar{F}^1$  itp.

Lemat III.2.1. Jeżeli  $\frac{i}{c}^* \in \Delta^*$ , to istnieje niepusty zbiór

$$\Delta^i = \left\{ Q(\delta_1, \dots, \delta_{\alpha^0-1}, \delta_{\alpha^0}) \mid \bigwedge_j \bar{b}_j \cdot \frac{i}{b_j}^* \geq 0 \right\}; \quad \nu+1 \leq j \leq \nu+\alpha^0-1,$$

gdzie

$$\frac{i}{b_j}^* = \frac{i}{b_{\nu+k}^*} = b_{\nu+k} \quad \text{gd}y \quad \frac{i}{c_k}^* = c_{\nu+k}$$

$$\frac{i}{b_j}^* = \frac{i}{b_{\nu+k}^*} + -b_{\nu+k} \quad \text{gd}y \quad \frac{i}{c_k}^* = -c_{\nu+k}$$

Warunki  $\bar{b}_j \cdot \frac{i}{b_j}^* \geq 0$  można zapisać:

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{b_{\nu+1}^*} (a_{\nu+1}^1 \delta_1 + \dots + a_{\nu+\alpha^0-1}^1 \delta_{\alpha^0-1} - b_{\nu+1}) \geq 0 \\ & - \frac{i}{b_{\nu+2}^*} (a_{\nu+1}^2 \delta_1 + \dots + a_{\nu+\alpha^0-1}^2 \delta_{\alpha^0-1} - b_{\nu+2}) \geq 0 \quad (\text{III.2.1}) \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & - \frac{i}{b_{\nu+\alpha^0-1}^*} (a_{\nu+1}^{\alpha^0-1} \delta_1 + \dots + a_{\nu+\alpha^0-1}^{\alpha^0-1} \delta_{\alpha^0-1} - b_{\nu+\alpha^0-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

Sugerowana teza wynika z nieosobliwości macierzy układu (III.2.1) - według przyjętych oznaczeń jest ona macierzą  $\bar{A}$  - dowodzonej w lemacie (III.1.1). Oczywista jest również z tego względu struktura geometryczna zbiorów  $\Delta^1$ .

Zauważmy jeszcze, że zbiory  $\Delta^1$  są zbiorami otwartymi i rozłącznymi a część wspólna ich domknięć jest zbiorem punktów

$$(-\alpha_1, \dots, -\alpha_{\alpha^0-1}, \alpha^0).$$

TWIERDZENIE III.2.1. Jeżeli

a)  $c^* \in \Delta^*$

b)  $Q^1(\delta_1^1, \dots, \delta_{\alpha^0-1}^1, \delta_{\alpha^0}^1) \in \Delta^1$ ,

to  $\min_{P \in R^v} F^1(P) = F^1(0, \dots, 0)$

D o w ó d. Z a) na podstawie lematu III.1.5 wynika, że  $\min_{P \in R^v} F^*(P) = F^*(0, \dots, 0)$ , co przy wymienionych na wstępie założeniach o funkcji  $F$  i punkcie  $P^0(0, \dots, 0)$  równoważne jest, zgodnie z twierdzeniem II.2.2 i związkami II.1.1 warunkom:

$$\left| \sum_{\substack{j \\ \frac{b_j^*}{a_s} < 0}} c_j - \sum_{\substack{j \\ \frac{b_j^*}{a_s} > 0}} c_j \right| \leq c_s \quad \text{dla } 1 \leq s \leq v$$

Z b), wobec definicji zbiorów  $\Delta^1$  oraz lematu III.2.1 wynika że współczynniki  $\bar{b}_j$  występujące w funkcji  $F^1$  indukowanej przez punkt  $Q^1$  są wszystkie różne od zera (przyjęty układ współrzędnych jest więc również dla funkcji  $F^1$  jedynym układem odpowiadającym punktowi  $P^0$ ) i mają znaki zgodne ze znakami współczynników  $b_j^*$ , skąd otrzymujemy, że dla dowolnej wartości parametru  $s$ ,  $1 \leq s \leq v$

$$\left| \sum_{\substack{j \\ \frac{\bar{b}_j}{a_s} < 0}} c_j - \sum_{\substack{j \\ \frac{\bar{b}_j}{a_s} > 0}} c_j \right| = \left| \sum_{\substack{j \\ \frac{b_j^*}{a_s} < 0}} c_j - \sum_{\substack{j \\ \frac{b_j^*}{a_s} > 0}} c_j \right| \leq c_s$$

Ostatnie związki dowodzą przedstawionej tezy.



Łatwo można pokazać, że

Lemat III.2.2. Jeżeli  $\min_{P \in R^0} F(P) = F^1(0, \dots, 0)$ , gdzie  $F^1$  jest funkcją indukowaną przez punkt  $Q^1(\delta_1^1, \dots, \delta_{\alpha_0^1}^1)$  i przyjęty układ współrzędnych jest również dla funkcji  $F^1$  jedynym układem odpowiadającym punktowi  $P^0$ , to istnieje taki wektor  $c^{i_1}$ , że  $Q^1 \in \Delta^{i_1}$ . Warunki nakładane na współrzędne punktów przestrzeni  $R^{\alpha_0}$ , dla których minimum rozważanej funkcji pozostaje w punkcie  $P^0(0, \dots, 0)$ , dotyczą przy przyjętych założeniach jedynie współrzędnych  $\delta_1^1, \dots, \delta_{\alpha_0^1}^1$ . Ponieważ jednak musi także zachodzić równość  $\sum_{i=1}^{\alpha_0} \delta_i = 0$ , więc z podanych rozważań wynika:

**TWIERDZENIE III.2.2.** Zbiór tych wszystkich punktów przestrzeni  $R^{\alpha_0}$ , dla których minimum badanej funkcji pozostanie w punkcie  $P^0(0, \dots, 0)$  i przyjęty układ współrzędnych jest dla wszystkich funkcji indukowanych tymi punktami, jedynym układem odpowiadającym punktowi  $P^0$ , jest częścią wspólną hiperpłaszczyzny  $\sum_{i=1}^{\alpha_0} \delta_i = 0$  i zbioru  $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\delta} \Delta^i$ , gdzie  $\delta$  oznacza liczbę elementów zbioru  $\Delta^*$ .

Wpłynęło do Redakcji w listopadzie 1974 r.

#### LITERATURA

- [1] Kaczmarski J.: Zagadnienie transportowe w związku z budową sieci. Część I i II. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Mat.-Fiz. w tym zeszycie.

#### УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

#### Резюме

В работе рассуждаются некоторые условия устойчивости решения транспортной задачи посредством методов описанных в статье: "Транспортная задача в связи с конструкцией сети".

---

**THE STABILITY OF THE TRANSPORT TASK SOLUTION****S u m m a r y**

There is found in the article the conditions of the stability of the solution of cartesian transport problem on the base of the methods shown in: "The Problems of the Flows in Transport Nets".