ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Olga MACEDOŃSKA-NOSALSKA

O NIEŁACZNOSCI ILOCZYNU GRUENBERGA-SZMIELKINA

Streszczenie. W artykule dowodzi się, że wśród rodziny iloczynów typu Gruenberga-Szmielkina nie ma iloczynów łącznych za wyjątkiem klasycznych iloczynów wolnego i prostego.

Algebraikom dobrze znane są pojęcia prostego i wolnego iloczynu grup. Iloczyny te pozwalają z dowolnych grup budować nowe lub stwierdzać w jaki sposób dana grupa jest skonstruowana ze swych podgrup. Dwa wymienione klasyczne iloczyny posiadają szereg wspólnych własności, na przykład są przemienne, łączne i indukują na podgrupach czynników ten sam iloczyn.

Dobrze znana jest olbrzymia rola, jaką odgrywają te klasyczne iloczyny w teorii grup..Jeszcze w roku 1944 w pierwszym wydaniu "Teorii grup" A.G. Kurosz postawił problem znalezienia i zbadania innych iloczynów grup, posiadających te lub inne własności iloczynów klasycznych. Pierwsze wyniki w tej dziedzinie pojawiły się dopiero po wojnie. Pierwszym przykładem nowego iloczynu grup, również przemiennego, łącznego i posiadającego pewne inne (nie wszystkie) własności iloczynów klasycznych był iloczyn nilpotentny [3]. Ten przykład został później uogólniony przez S. Morana, który zdefiniował całą serię tak zwanych iloczynów werbalnych [9].Pojawiają się nowe przykłady i serie iloczynów grup [8], [11].

W roku 1962 powstaje nowa teoria iloczynów poliwerbalnych [4].

W procesie badań iloczynów okazało się, że każdy z przykładów iloczynów grup posiadał te lub inne własności iloczynów klasycznych, żaden iloczyn nie posiadał jednak wszystkich tych własności.

Własnością szeroko rozpowszechnioną okazała się łączność. Natomiast do roku 1956 nie znano żadnego nieklasycznego przykładu iloczynu grup, który indukowałby na podgrupach czynników ten sam iloczyn. Pierwszy taki przykład był podany w pracy [10].

W roku 1957 cała seria iloczynów z taką własnością znaleziona została niezależnie przez Gruenberga [5] i Szmielkina [12].

Później zaczęły pojawiać się inne przykłady podobnych iloczynów.

Od 25 lat pozostaje otwarty problem sformułowany przez A.I. Malcewa, dotyczący istnienia regularnego iloczynu, który indukuje ten sam iloczyn na podgrupach czynników i jest jednocześnie łączny. Dla rozwiązania tego zagadnienia wystarczyłoby znaleźć przykład łącznego iloczynu wśród iloczynów nieklasycznych typu Gruenberga-Szmielkina.

Próby badania łączności iloczynów tego typu były czynione od roku 1956 [10].

Posługując się aparatem teorii iloczynów poliwerbalnych wykażemy jednak, że każdy iloczyn nieklasyczny typu Gruenberga-Szmielkina nie jest łączny.

I. Definicje i oznaczenia

Niech A - podzbiór elementów grupy G.
Oznaczamy przez $\{A\}$ najmniejszą podgrupę w G, zawierającą podzbiór A.
Oznaczamy przez A^G najmniejszy dzielnik normalny w G, zawierający podzbiór A.
Niech A i B będą podgrupami grupy G.
Oznaczamy przez $[A,B]$ podgrupę, generowaną w G przez wszystkie komutatory $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$, gdzie a i b są dowolnymi elementami odpowiednio z A i B.
Przez ${}^kG$ oznaczamy k-ty wyraz dolnego szeregu centralnego, gdzie ${}^1G = G$ ${}^kG = [{}^{k-1}G, G]$.
Mówimy, że element $g \in G$ jest komutatorem wagi k, jeżeli $g \in {}^kG$, $g \in {}^{k+1}G$.
Niech G_ν, $\nu \in I$ rodzina dowolnych grup G_ν. Iloczyn wolny tych grup oznaczamy przez $F = \prod^*_{\nu \in I} G_\nu$.

Iloczyn prosty oznaczamy przez $G = \prod^{X}_{\nu \in I} G_\nu$.

Podgrupą kartezjańską w F nazywamy jądro C_F homomorfizmu naturalnego F na G. Jasne jest, że elementy tworzące C_F jako dzielnik normalny są komutatorami postaci $[g_i, g_j]$, gdzie $g_i \in G_{\nu_i}$, $g_j \in G_{\nu_j}$.
Przez V(G) będziemy oznaczać werbalną podgrupę grupy G, określoną przy pomocy werbalnej podgrupy V pewnej grupy wolnej X.
Iloczynem Gruenberga-Szmielkina (lub V(C) - iloczynem) rodziny grup G_ν, $\nu \in I$, odpowiadającym werbalnej podgrupie V nazywa się grupa ilorazowa iloczynu wolnego tych grup względem werbalnej podgrupy w podgrupie kartezjańskiej:

$$\prod^{V(C)}_{\nu \in I} G_\nu = F/V(C_F)$$

Wszystkie potrzebne definicje można znaleźć w [6], [7].

TWIERDZENIE. Operacje Gruenberga-Szmielkina różne od klasycznych są niełączne.

Iloczyn Gruenberga-Szmielkina jest, jak łatwo sprawdzić, iloczynem neutralnym poliwerbalnym, więc przypuszczając jego łączność możemy korzystać z warunku koniecznego dla łączności iloczynów neutralnych poliwerbalnych, udowodnionego przez autorkę w [1]. Warunek ten zapisany dla V(C)-iloczynu

i grupy $F = A \circ B$, generowanej przez podgrupy A i B z warunkiem $A^F \cap B = A \cap B^F = 1$, będzie miał postać:

$$V([F,F]) \cap [A,B]^F = [V([A,A]),B]^F [V([B,B]),A]^F V([A,B]^F) \qquad (1)$$

D o w ó d polega na dobraniu odpowiednich grup A, B, $F = A \circ B$ dla których równość (1) nie zachodzi, co będzie sprzeczne z przypuszczeniem łączności $V(C)$-iloczynu.

Dowód składać się będzie z dwóch części, w zależności od tego czy spełniony jest warunek $V \leq [X,X]$. Przypuśćmy najpierw, że $V \leq [X,X]$.
Wtedy dla pewnego naturalnego K zachodzi $V \leq {}^kX$ i $V \not\leq {}^{k+1}X$. Stąd wynika, że $V([F,F]) \leq {}^k[F,F] \leq {}^{2k}F$, $V([F,F]) \not\leq {}^{2k+1}F$ dla dowolnej grupy F.
Przyjmijmy teraz jako grupę F iloczyn wolny $F = A*B$, gdzie $A = \{a\}$ nieskończona grupa cykliczna.
$B = \{b\} * \{c\}$ iloczyn wolny dwóch nieskończonych grup cyklicznych. Ponieważ $[A,A] = 1$ równość (1), zapisana dla wybranej grupy F, przyjmuje postać:

$$V([F,F]) \cap [A,B]^F = [V([B,B]),A]^F V([A,B]^F) \qquad (2)$$

Oznaczmy przez Z pierścień liczb całkowitych, przez A_0 wolną łączną Z-algebrę z wolnymi tworzącymi x,y,z. Oznaczmy przez Λ_0 wolną Z-algebrę Liego w A_0 z wolnymi tworzącymi x,y,z względem operacji $(\alpha,\beta) = \alpha\beta - \beta\alpha$
Zgodnie z [6] oraz z twierdzeniem 5.6 elementy $1+x$, $1+y$, $1+z$ tworzą wolną grupę $\bar{F}$ w Λ_0 względem operacji (α,β). Każdy element $\bar{F}$ ma postać:

$$f = 1 + \sum_i P_i(x,y,z), \qquad (3)$$

gdzie $P_i(x,y,z)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia i zmiennych x,y,z.
Stopniem elementu f nazywamy minimalny stopień wielomianów jednorodnych $P_i(x,y,z)$ w jego zapisie (3). Tak więc element stopnia n ma postać

$$1 + \sum_{i=n}^{\infty} P_i(x,y,z), \quad P_n(x,y,z) \neq 0.$$

Zgodnie z 12 i twierdzeniami 5.7, 5.12 każdy element z ${}^nF$ ma stopień $> n$.

Zidentyfikujemy grupy $\bar{F}$ i F, przyjmując $a = 1+x$, $b = 1+x$, $c = 1+z$. Nie uwzględniając czynników liczbowych możemy zapisać dowolny element z A w postaci $1+x+x^2 + \ldots$, element z B w postaci $1+y+z+y^2 + yz+z^2 + \ldots$ Jak mówiliśmy wyżej $V([F,F]) \leq {}^{2k}F$, więc elementy z $V([F,F])$ mają stopień

$\geqslant 2k$, a elementy z $[V([B,B]),A]^F$ mają odpowiednio stopień $\geqslant 2k+1$. Stopień elementów z $V([A,B]^F)$ jest również $\geqslant 2k$ z tym, że elementy mające stopień $2k$ są postaci $v = v(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, gdzie

$$v \in V \cap {}^kX, \quad v \notin {}^{k+1}X,$$

a składowe q_i leżą w $[A,B]^F$ i mają stopień równy 2. Korzystając z postaci elementów z A i B widzimy, że komponenty q_i mają postać:

$$1 + x(y + z) - (y + z)x + \ldots = 1 + xy + xz - yx - zx + \ldots,$$

a więc zawierają zmienną x w każdym jednomianie stopnia 2. Wynika stąd, że każdy element z prawej strony równości (2) posiada albo stopień $> 2k$, albo, posiadając stopień równy $2k$, zawiera w każdym jednomianie tego stopnia k razy zmienną x.

Znajdziemy teraz w lewej części równości (2) element stopnia $2k$, nie posiadający powyższej postaci. Dla znalezienia takiego elementu w

$$V([F,F]) \cap [A,B]^F$$

weźmiemy w V dowolny komutator v o wadze k. Zapiszemy element $v \in X$ modulo ${}^{k+1}X$ w postaci

$$v = \prod C_i^{\alpha_i} \bmod {}^{k+1}X,$$

gdzie C_i - komutatory o wadze k postaci

$$C_i = [\ldots [x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \ldots, x_{i_k}].$$

Wybierzemy w tym zapisie czynnik C_{i_0} zawierający najmniejszą ilość różnych x_{i_j} jako komponent.

Zastąpimy jednością wszystkie x_{i_j}, które nie są komponentami C_{i_0}. Otrzymamy przy tym element $\bar{v}$, którego odpowiednia wartość w $[A,B]^F$ będzie poszukiwanym elementem ξ.

Pozostaje wskazać elementy z $[A,B]^F$ jako komponenty dla $\bar{v}$. W charakterze jednej z jego komponent weźmiemy element $[a,b] = 1 + xy - yx + \ldots$, a w charakterze pozostałych - element $[b,c] = 1 + yz - zy + \ldots$, którego jednomiany nie zawierają zmiennej x. Dostaniemy element

$$\xi = \bar{v}([a,b], [b,c], \ldots, [b,c]),$$

który leży w lewej części (2), ma stopień 2k, ale jednomiany stopnia 2k zawierają mniej niż k razy zmienną x.
Wynika stąd, że równość (2) nie jest prawdziwa, co oznacza brak łączności rozpatrywanych V(C)-iloczynów.

Pozostaje przypadek V(C)-iloczynów, dla których $V \not\subseteq [X,X]$. Oznacza to, że dla pewnego n mamy $X^n \leq V$, tj. dla dowolnego $x \in X$, $x^n \in V$.
Będziemy uważać, że $n > 1$, bo dla $n = 1$ odpowiedni V(C)-iloczyn jest iloczynem prostym.
Położymy $A = \{a\}_n$ - cykliczna, rzędu n,

$$B = (\{b\}_2 * \{c\}_2)/\{[b,c]^n\}$$

- grupa ilorazowa iloczynu wolnego dwóch grup cyklicznych rzędu 2 względem n-tej potęgi komutanta. Oznaczmy $K = \prod_{b \in B} {}^{x} A_b$ - iloczyn prosty grup A_b, z których każda jest izomorficzna z A i odpowiada pewnemu elementowi z B. Określimy $F = A \text{ wr } B$ jako splot (wreath product) A i B, to znaczy

$$F = \{K,B \mid b_1^{-1} a_b b_1 = a_{bb_1};\ a \in A;\ b, b_1 \in B\}.$$

Zgodnie z [2] i twierdzeniem 1 $F = A_1 \circ B$, gdzie właśnie będziemy rozpatrywać warunek łączności (1). Zauważmy, że podgrupy $[B,B]$ i $[A_1,B]$ są grupami abelowymi eksponenty n, więc

$$V([B,B]) = V([A_1,B]) = 1$$

Oprócz tego $[A_1,A_1] = 1$, więc równość (1) przyjmuje postać:

$$V([F,F]) \cap [A_1,B]^F = 1 \tag{4}$$

Rozpatrujmy teraz element ξ postaci:

$$\xi = [a_1\, a_{[b,c]} \cdots a_{[b,c]^{n-1}},\ c] =$$

$$= a_1^{-1}\, a_{[b,c]}^{-1} \cdots a_{[b,c]^{n-1}}^{-1}\, a_c\, a_{[b,c]}\, c \cdots a_{[b,c]^{n-1}}\, c^{-1}$$

Wskaźniki czynników tej postaci ξ są różnymi elementami B, skąd wynika, że $\xi \neq 1$. Sprawdzimy teraz przynależność ξ do lewej części równości (4)
Z podanej postaci ξ wynika, że $\xi \in [A_1,B]^F$.
Wystarczy więc stwierdzić, że $\xi \in V([F,F])$.

Zgodnie z założeniem $x^n \in V$, stwierdzimy, że

$$\xi = b[a_1 b, c]^n b^{-1} \in V([F,F])$$

Stosujemy dalej łatwe do sprawdzenia równania:

1) $ba_1 = a_{b^{-1}} b$,

2) $[a_1 b, c] = [a_1, c]^b [b,c]$

3) $[b,c]^{b^{-1}} = [c,b]$

oraz metodę indukcji matematycznej względem n. Dla $n = 1$ otrzymujemy:

$$b[a_1 b, c]b^{-1} = ([a_1, c]^b [b,c])^{b^{-1}} = [a_1, c][c,b] =$$

$$= a_1^{-1} a_c [c,b] = \alpha_1 [c,b], \quad \text{gdzie } \alpha_1 = a_1^{-1} a_c.$$

Dla $n = 2$ $\quad b[a_1 b, c]^2 b^{-1} = \alpha_1 [c,b] a_1^{-1} a_c [c,b] =$

$$= \alpha_1 [b,c]^{-1} a_1^{-1} a_c [b,c][c,b]^2 = \alpha_1 a_{[b,c]}^{-1} a_{c[b,c]} [c,b]^2 = \alpha_2 [c,b]^2,$$

gdzie

$$\alpha_2 = \alpha_1 a_{[b,c]}^{-1} a_{c[b,c]}$$

Załóżmy, że

$$b[a_1 b, c]^{n-1} b^{-1} = \alpha_{n-1} [c,b]^{n-1}, \quad \text{gdzie } \alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} a_{[b,c]}^{-1}{}^{n-2} a_{c[b,c]}{}^{n-2}$$

Wówczas

$$b[a_1 b, c]^n b^{-1} = \alpha_{n-1} [c,b]^{n-1} a_1^{-1} a_c [c,b] =$$

$$= \alpha_{n-1} [b,c]^{-(n-1)} a_1^{-1} a_c [b,c]^{n-1} [c,b]^n =$$

$$= \alpha_{n-1} a_{[b,c]}^{-1}{}^{n-1} a_{c[b,c]}{}^{n-1} [c,b]^n = \alpha_n [c,b]^n.$$

Ponieważ w F $[c,b]^n = 1$ oraz

$$c[b,c]^k = [c,b]^k c = [b,c]^{n-k} c.$$

mamy, że

$$b[a_1 b,c]^n b^{-1} = \alpha_n = a_1^{-1} a_c a_{[b,c]}^{-1} a_{c[b,c]} \cdots a_{[b,c]^{n-1}}^{-1} a_{c[b,c]^{n-1}} =$$

$$= a_1^{-1} a_{[b,c]}^{-1} \cdots a_{[b,c]^{n-1}}^{-1} a_c a_{[b,c]c} \cdots a_{[b,c]^{n-1}c} = \xi$$

Znaleźliśmy w ten sposób element $\xi \neq 1$, który leży w lewej części równości (4).

Wynika stąd, że równość (4) nie jest słuszna, a więc rozpatrywany V(C) -iloczyn nie jest łączny. Twierdzenie zostało w pełni dowiedzione.

Wpłynęło do Redakcji w listopadzie 1974 r.

LITERATURA

[1] Ашманов С.А., Мацедонская О.Н.: О правильных операциях, удовлетворяющих постулату Мальцева. Сиб.мат. жур. 1966, 7, № 6, 1216-1229.

[2] Брумберг Н.Р.: Связь сплетений групп с другими операциями над группами. Сиб. мат. жур. 1963, 4, № 6, 1221-1234.

[3] Головин О.Н.: Нильпотентные произведение групп. Мат. сб. 1950, 27 69 № 3, 427-454.

[4] Головин О.Н.: Политождественные соотношения в группах и определяемые ими операции на классе всех групп. Тр. Моск. мат. об-ва, 1963, вып 12, 413-435.

[5] Gruenberg K.W.: Residual properties of infinite soluble groups. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 1957, 7, N 25, 29-62.

[6] Курош А.Г.: Теория групп. Москва 1967.

[7] Magnus W., Karrass A.: Solitar D. Combinatorial group theory.New York - London - Sydney 1966.

[8] Ляпин Е,С.: Полные действия в классах ассоциативных систем и групп. Уч. зап. Ленинград пед. ин-та им. Герцена, 1949, 86, 93-106.

[9] Moran S.: Associative operations on groups I., Proc. Lond. Math. Soc (3), 1956, 6, N 24, 581-596.

[10] Struik R.R.: On associative products of groups. Trans. Amer.Math.Soc. 1956, 81, N 2, 425-452.

[11] Фридман М.А.: О полукоммутативных умножениях. Докл. А.Н. СССР, 1956,109 № 4, 710-712.

[12] Шмелькин А.Л.: К теории правильных произведений групп. Мат. сб. 1960, 51 93 , № 3, 277-292.

О НЕАССОЦИАТИВНОСТИ ОПЕРАЦИЙ ГРЮНБЕРГА-ШМЕЛЬКИНА

Р е з ю м е

В данной статье даётся доказательство неассоциативности операций Грюнберга-Шмелькина или V(C) операций , отличных от прямого и свободного умножения.

ON NONASSOCIATIVITY OF GRUENBERG AND SMEL'KIN'S OPERATIONS

S u m m a r y

It is shown here that each operation of above type different from free and direct product is not associative.