ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Jan STOLARZ

O PEWNEJ KLASIE EKSTREMALNYCH RÓWNAŃ FUNKCYJNYCH

Streszczenie. W pracy niniejszej dowodzi się twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania

$$f^t(x) = \sup_{(p,q)\in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q)\right],$$

$$f^t(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

oraz podaje się pewien związek między rozwiązaniami tej klasy równań w zależności od parametru t.

Rozważać będziemy następującą klasę ekstremalnych równań funkcyjnych

$$f^t(x) = \sup_{(p,q)\in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q)\right], \tag{1}$$

$$f^t(0) = 0$$

zależną od parametru t przyjmującego wartości z przedziału $\langle 0,1\rangle$.

W równaniu (1) x jest zmienną niezależną przebiegającą przedział $X = \langle 0, +\infty)$, $(p,q)\in S_t(x)\subset R^2$, S_t jest daną funkcją przyporządkowującą każdej liczbie $x \in C$ zbiór $S_t(x)$

$$S_t(x) = \left\{(p,q)\in R^2 : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ tx \leqslant p + q \leqslant x\right\},$$

g i h są danymi funkcjami rzeczywistymi określonymi i nieujemnymi w X, $g(0) = h(0) = 0$,
a i b są danymi liczbami z przedziału $(0,1)$,
$f^t : X \to R^1$ jest funkcją poszukiwaną.

TWIERDZENIE 1. Jeżeli istnieje liczba A taka, że

$$g(x) \leqslant Ax \quad \text{i} \quad h(x) \leqslant Ax \quad \text{dla każdego} \quad x \in X, \tag{2}$$

to dla każdej wartości parametru $t \in \langle 0,1 \rangle$ równanie (1) posiada rozwiązanie: jednoznaczne (w klasie funkcji ograniczonych w każdym przedziale $I \subset X$ i ciągłych prawostronnie w zerze), gdy $t \in (0,1\rangle$, wieloznaczne dla $t = 0$.

Dowód. Każdej liczbie $t \in \langle 0,1\rangle$ przyporządkujemy ciąg $\{f_n^t(x)\}$, gdzie

$$f_1^t(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q)\right],$$

$$f_n^t(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f_{n-1}^t(ap + bq + x - p - q)\right], \tag{3}$$

$n = 2,3, \ldots$

Na mocy nierówności (2)

$$\sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q)\right] \leqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} A(p + q) = Ax$$

dla każdego $x \in X$.

Zatem

$$f_1^t(x) \leqslant Ax \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Zakładając, że dla każdego $x \in X$

$$f_n^t(x) \leqslant AM_n x, \quad \text{gdzie} \quad M_n = 1 + c + \ldots + c^{n-1},$$

$c = \max(a,b)$, otrzymujemy

$$f_{n+1}^t(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f_n^t(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$\leqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[A(p + q) + AM_n(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$\leqslant \sup_{(p,q) \in S_o(x)} \left[A(p + q) + AM_n(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$= Ax \cdot \max(M_n, 1 + aM_n, 1 + bM_n)$$

$$\leqslant Ax \cdot \max(M_n, M_{n+1}, M_{n+1}) = AM_{n+1}x.$$

Zatem i na mocy indukcji matematycznej

$$f_n^t(x) \leqslant A(1 + c + \dots + c^{n-1})x$$

dla $n = 1,2, \dots$ i dowolnego $x \in X$.
Ponieważ $1 + c + \dots + c^{n-1} < \frac{1}{1-c}$, więc

$$f_n^t(x) \leqslant \frac{Ax}{1 - c}, \quad x \in X, \quad n = 1,2, \dots \tag{4}$$

Z nieujemności funkcji g i h w X wynika nierówność

$$\sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q)\right] \geqslant 0, \quad x \in X,$$

co oznacza, że

$$f_1^t(x) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \in X. \tag{5}$$

Zatem

$$f_2^t(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f_1^t(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$\geqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q)\right] = f_1^t(x).$$

Załóżmy, że

$$f_n^t(x) \geqslant f_{n-1}^t(x) \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Wobec tego

$$f_{n+1}^t(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f_n^t(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$\geqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f_{n-1}^t(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$= f_n^t(x),$$

co oznacza niemalenie ciągu $\left\{ f_n^t(x) \right\}$ dla każdego $x \in X$.

Stąd oraz z (4) i (5) wynika, że

$$0 \leqslant f_n^t(x) \leqslant \frac{Ax}{1 - c}, \quad x \in X, \quad n = 1,2, \ldots \tag{6}$$

Zatem ciąg $\{ f_n^t(x) \}$ jest ograniczony i niemalejący dla każdego $x \in X$, a więc zbieżny. Istnieje więc funkcja $f^t(x)$ taka, że

$$\lim_{n \to \infty} f_n^t(x) = f^t(x). \tag{7}$$

Stąd i z (6)

$$0 \leqslant f^t(x) \leqslant \frac{Ax}{1 - c}, \quad x \in X$$

Ponadto $f^t(0) = 0$. Stąd i z ostatniej nierówności wynika ciągłość prawostronna funkcji f^t w zerze.
Z monotoniczności ciągu $\{f_n^t(x)\}$ wynika nierówność

$$f_n^t(x) \leqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q)\right].$$

Wobec tego

$$f^t(x) \leqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q)\right]. \tag{8}$$

Na podstawie własności operacji "supremum"

$$f_n^t(x) \geqslant g(p) + h(q) + f_{n-1}^t(ap + bq + x - p - q)$$

dla każdego punktu $(p,q) \in S_t(x)$. Stąd po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ otrzymujemy

$$f^t(x) \geqslant g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q) \quad \text{dla} \quad (p,q) \in S_t(x).$$

Zatem

$$f^t(x) \geqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q)\right]. \tag{9}$$

Z (8) i (9) wynika równość

$$f^t(x) = \sup_{(p,q)\in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q)\right],$$

która oznacza, że funkcja $f^t(x)$ jest rozwiązaniem równania (1). Równanie (1) posiada więc rozwiązanie przy każdej wartości parametru $t \in \langle 0,1\rangle$. Rozważmy funkcję

$$f(x) = Mx \quad \text{gdzie} \quad M \geqslant \max\left(\tfrac{A}{1-a}, \tfrac{A}{1-b}\right), \quad x \in X.$$

Ponieważ funkcja

$$G(p,q) = g(p) + h(q) + M(ap + bq + x - p - q)$$

przyjmuje w punkcie $(0,0) \in S_0(x)$ wartość Mx, więc

$$\sup_{(p,q)\in S_0(x)} \left[g(p) + h(q) + M(ap + bq + x - p - q)\right] \geqslant Mx.$$

Z określenia liczby M wynika, że

$$A + Ma \leqslant M \quad \text{i} \quad A + Mb \leqslant M.$$

Wobec tego

$$\sup_{(p,q)\in S_0(x)} \left[g(p) + h(q) + M(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$\leqslant \sup_{(p,q)\in S_0(x)} \left[A(p + q) + M(ap + bq + x - p - q)\right]$$

$$= x \max(M, A + Ma, A + Mb) = Mx,$$

co wraz z nierównością uzyskaną wyżej daje równość

$$\sup_{(p,q)\in S_0(x)} \left[g(p) + h(q) + M(ap + bq + x - p - q)\right] = Mx$$

mówiącą o tym, że równanie (1) dla wartości parametru $t = 0$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Niech t będzie dowolną liczbą z przedziału $(0,1\rangle$, a F_1 i F_2 dowolnymi funkcjami ograniczonymi w każdym przedziale $I \subset X$, ciągłymi prawostronnie w zerze, $F_1(0) = F_2(0) = 0$ i ponadto

$$F_1(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} G_1(p,q),$$

$$F_2(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} G_2(p,q),$$

gdzie

$$G_1(p,q) = g(p) + h(q) + F_1(ap + bq + x - p - q),$$

$$G_2(p,q) = g(p) + h(q) + F_2(ap + bq + x - p - q).$$

Niech

$$H(x) = \sup_{0 \leqslant z \leqslant x} |F_1(z) - F_2(z)|.$$

Funkcja H jest ciągła prawostronnie w zerze i $H(0) = 0$.
Ponieważ dla każdego punktu $(p,q) \in S_t(x)$

$$|G_1(p,q) - G_2(p,q)| =$$

$$= |F_1(ap + bq + x - p - q) - F_2(ap + bq + x - p - q)|$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant z \leqslant dx} |F_1(z) - F_2(z)| = H(dx)$$

gdzie $d = \max(a,b, 1 + at - t, 1 + bt - t) < 1$, więc dla $(p,q) \in S_t(x)$

$$G_2(p,q) - H(dx) \leqslant G_1(p,q) \leqslant G_2(p,g) + H(dx),$$

skąd

$$- H(dx) + \sup_{(p,q) \in S_t(x)} G_2(p,q) \leqslant \sup_{(p,q) \in S_t(x)} G_1(p,q)$$

$$\leqslant H(dx) + \sup_{(p,q) \in S_t(x)} G_2(p,q);$$

w takim razie

$$|F_1(x) - F_2(x)| \leqslant \sup_{0 \leqslant z \leqslant dx} |F_1(z) - F_2(z)|.$$

Wobec tego

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant x}|F_1(u)-F_2(u)|\leqslant\sup_{0\leqslant u\leqslant x}\ \sup_{0\leqslant z\leqslant du}|F_1(z)-F_2(z)|$$

Zatem $H(x)\leqslant H(dx)$, bo

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant x}\ \sup_{0\leqslant z\leqslant du}|F_1(z)-F_2(z)| = \sup_{0\leqslant z\leqslant dx}|F_1(z)-F_2(z)| = H(dx).$$

Z ostatniej nierówności wynika, że

$$H(x)\leqslant H(d^n x) \quad \text{dla każdego} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Stąd po przejściu do granicy przy $n\to\infty$ otrzymujemy nierówność $H(x)\leqslant 0$ Ponadto $H(x)\geqslant 0$. Zatem $H(x) = 0$, więc $F_1(x) = F_2(x)$, co oznacza, że równanie (1) dla $t\in(0,1\rangle$ posiada jednoznaczne rozwiązanie określone wzorem (7).

TWIERDZENIE 2. Jeżeli
1° funkcje g i h są ciągłe w X,
2° istnieje taka liczba A, że dla każdego $x\in X$

$$g(x)\leqslant Ax \quad \text{i} \quad h(x)\leqslant Ax,$$

3° $\max[g(x), h(x)] > 0$ dla $x\in X$, to

$$\lim_{t\to 0} + f^t(x) = f^0(x),$$

gdzie f^t, $t\in\langle 0,1\rangle$ są funkcjami określonymi wzorem (7).
Twierdzenie 2 oznacza, że rozwiązanie $f^0(x)$ równania (1) przy $t = 0$ można otrzymać jako granicę $\lim\limits_{t\to 0+} f^t(x)$, gdzie $f^t(x)$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (1) przy $t\in(0,1\rangle$.

D o w ó d. Wykażemy najpierw, że dla każdej ustalonej liczby $t\in(0,1\rangle$

$$f_n^0(x)\geqslant f_n^t(x) \quad \text{dla każdego} \quad x\in X, \tag{10}$$

gdzie $\{f_n^0(x)\}$ i $\{f_n^t(x)\}$ są ciągami funkcyjnymi określonymi wzorami (3). Prawdziwość nierówności (10) dla $n = 1$ wynika z inkluzji $S_t(x)\subset S_0(x)$. Zakładając, że

$$f_n^0(x)\geqslant f_n^t(x),$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f^{o}_{n+1}(x) &= \sup_{(p,q)\in S_o(x)} \left[g(p) + h(q) + f^{o}_{n}(ap + bq + x - p - q)\right] \\ &\geqslant \sup_{(p,q)\in S_o(x)} \left[g(p) + h(q) + f^{t}_{n}(ap + bq + x - p - q)\right] \\ &\geqslant \sup_{(p,q)\in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^{t}_{n}(ap + bq + x - p - q)\right] \\ &= f^{t}_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność (10) jest prawdziwa dla każdej liczby $n = 1, 2, \ldots$

Ponieważ dla każdego $t \in \langle 0,1\rangle$ i dowolnego $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} f^{t}_{n}(x) = f^{t}(x),$$

więc

$$f^{o}(x) \geqslant f^{t}(x) \tag{11}$$

dla każdego $t \in (0,1\rangle$ i dowolnego $x \in X$.

Postępując podobnie można wykazać, że jeśli

$$0 < t_1 < t_2 \leqslant 1,$$

to

$$f^{t_1}(x) \geqslant f^{t_2}(x) \quad \text{dla każdego } x \in X. \tag{12}$$

Dla dowolnego $x \in X$ definiujemy ciąg zbiorów $\{s_n(x)\}$, gdzie

$$s_1(x) = \left\{(p,q) \in S_o(x) : f^{o}_{1}(x) = g(p) + h(q)\right\},$$

$$s_n(x) = \left\{(p,q) \in S_o(x) : f^{o}_{n}(x) = g(p) + h(q) + f^{o}_{n-1}(ap + bq + x - p - q)\right\}$$

$$n = 2, 3, \ldots,$$

i ciąg liczb $\{r_n(x)\}$

$$r_n(x) = \inf\left\{p + q : (p,q) \in s_n(x)\right\}$$

O funkcjach $r_n(x)$, $n = 1,2, \ldots$, można wykazać (dowód pomijamy), że dla każdego $x_0 > 0$

$$\inf_{x \in (0,x_0>} \frac{r_n(x)}{x} > 0 \tag{13}$$

Ponadto

$$f_1^o(x) = \sup_{\substack{p+q=r_1(x)\\ p,q\geqslant 0}} \left[g(p) + h(q)\right],$$

$$f_n^o(x) = \sup_{\substack{p+q=r_n(x)\\ p,q\geqslant 0}} \left[g(p) + h(q) + f_{n-1}^o(ap + bq + x - p - q)\right],$$

$$n = 2, 3, \ldots$$

Niech $\varepsilon > 0$ i $x > 0$ będą chwilowo ustalonymi liczbami.
Z (13) wynika istnienie ciągu $\{t_n'\}$, takiego, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$

$$0 \leqslant t_n' \leqslant 1$$

$$\inf_{u \in (0,x>} \frac{r_n(u)}{u} = t_n'$$

Istnieje liczba N taka, że

$$f^o(x) - f_N^o(x) < \varepsilon \tag{14}$$

Łatwo udowodnić, że dla każdego $n = 1,2, \ldots$

$$f_N^o(x) = f_N^{t_N}(x), \tag{15}$$

gdzie $t_N = \min(t_1', \ldots, t_N')$.
Na mocy niemalenia ciągu $\{f_n^t(x)\}$

$$f_N^{t_N}(x) \leqslant f^{t_N}(x). \tag{16}$$

Z (12) wynika nierówność

$$f^{t_N}(x) \leqslant f^t(x) \quad \text{dla każdego} \quad t \in (0, t_N). \tag{17}$$

Uwzględniając (15), (16) i (17) mamy

$$f_N^o(x) \leqslant f^t(x) \quad \text{dla} \quad t \in (0, t_N).$$

Stąd oraz z (11) i (14) wynika, że

$$0 \leqslant f^o(x) - f^t(x) \leqslant f^o(x) - f_N^o(x) < \varepsilon$$

co kończy dowód.

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Bellman R.: Dynamic programming. Princeton 1957.
[2] Kwapisz M.: On a certain functional equation. Colloquium Mathematicum 18 (1967) p. 169-179.
[3] Stolarz J.: O rozwiązaniach pewnego ekstremalnego równania funkcyjnego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Matematyka-Fizyka z. 25 1974.
[4] Stolarz J.: O pewnym problemie planowania dynamicznego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria Matematyka-Fizyka (praca w druku).

О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В данной работе доказана теорема существования и единственности решения уравнения

$$f^t(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q)\right],$$

$$f^t(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

а также устанавливается некоторая связь между решениями уравнений из этого класса в зависимости от параметра t.

ON SOME CLASS OF EXTREMAL FUNCTIONAL EGUATIONS

S u m m a r y

The paper contains the proof of the theorem of unigue existence of the solution of the eguation:

$$f^t(x) = \sup_{(p,q) \in S_t(x)} \left[g(p) + h(q) + f^t(ap + bq + x - p - q) \right],$$

$$f^t(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Moreover it is given one relation between solutions of this class of eguations in dependence on parameter t.