ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

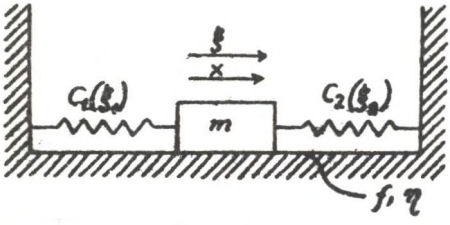
Stanisław KOWALIK

Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej

BADANIE STABILNOŚCI STOCHASTYCZNEJ PEWNEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

Streszczenie. W pracy zbadano stabilność pewnego układu mechanicznego zakładając, że wymuszenie jest procesem stochastycznym. Przyjęto także, że stałe sprężyn mają charakter probabilistyczny. Podano warunek dostateczny, aby położenie wokół którego układ wykonuje drgania deterministyczne było położeniem równowagi trwałej przy wymuszeniu stochastycznym.

Zajmiemy się badaniem stabilności stochastycznej układu złożonego z masy umocowanej na dwóch sprężynach jak pokazuje rys. 1. Przyjmujemy, że wymuszenie jest procesem stochastycznym oraz, że stałe sprężyn też mają charakter stochastyczny. W równaniach ruchu uwzględnimy tłumienie i tarcie. Wyprowadzimy warunki dostateczne, aby położenie wokół którego układ wykonuje drgania deterministyczne było położeniem równowagi trwałej przy wymuszeniu stochastycznym.



Rys. 1

m - masa, x - współrzędna położenia, ξ - proces losowy, f - siła tarcia, η - opór powietrza

Podejście probabilistyczne do tego zagadnienia jest ogólniejsze niż deterministyczne i ma praktyczne uzasadnienie. Proces zaburzeniowy ξ można interpretować jako wpływ warunków zewnętrznych, które nie da się dokładnie opisać. Stochastyczne charakterystyki sprężyn można przypisać niedoskonałości wykonania sprężyn i ukrytych w nim wadom.

Rozpatrywany układ przedstawiony jest na rysunku 1.

Przyjmujemy, że stałe sprężyn zależą od procesów losowych ξ_1 i ξ_2 w następujący sposób:

$$c_1(\xi_1) = c_1 + \xi_1, \quad c_2(\xi_2) = c_2 + \xi_2,$$

gdzie:

$$c_1, c_2 = \text{const.}$$

Równanie ruchu ma postać:

$$m\ddot{x} = -\eta\dot{x} - (c_1 + \xi_1)x - (c_2 + \xi_2)x + \xi - mgf\,\mathrm{sgn}(\dot{x})$$

Przekształcamy to równanie

$$m\ddot{x} = -\eta\dot{x} - (c_1 + c_2)x - (\xi_1 + \xi_2)x + \xi - mgf\,\mathrm{sgn}(\dot{x})$$

$$\ddot{x} = -\frac{\eta}{m}\dot{x} - \frac{c_1 + c_2}{m}x - \frac{\xi_1 + \xi_2}{m}x + \frac{\xi}{m} - gf\,\mathrm{sgn}(\dot{x}).$$

Wprowadzamy nowe oznaczenia

$$-\frac{\eta}{m} = \alpha, \quad -\frac{c_1 + c_2}{m} = \beta, \quad -\frac{\xi_1 + \xi_2}{m} = \xi_3,$$

$$\frac{\xi}{m} - gf\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) = \xi_4$$

Równanie przyjmie teraz prostszą postać

$$\ddot{x} = \alpha\dot{x} + \beta x + \xi_3 x + \xi_4$$

To równanie można sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha y + \beta x + \xi_3 x + \xi_4 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} dx = y\,dt \\ dy = \alpha y dt + \beta x dt + x d\xi_5 + d\xi_6, \end{cases}$$

gdzie:

$$\dot{\xi}_5 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_6 = \xi_4,$$

Zakładamy, że procesy $\dot{\xi}_5$ i $\dot{\xi}_6$ są nieskorelowanymi "białymi" szumami lub szerokopasmowymi normalnymi procesami stochastycznymi o średnich równych zero [1].

Pozwala nam to analizować liniowy układ równań Ito traktując $d\xi_6$ jako zaburzenie. Pokazać można, że wykładnicza p-stabilność trywialnego rozwiązania równań Ito zapewnia stabilność przy stale działających zaburzeniach [1], [3].

Układ równań zapisujemy w postaci:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ \beta, & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} d\xi_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ d\xi_6 \end{bmatrix}$$

Wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ d\xi_6 \end{bmatrix}$ traktujemy jako zaburzenie, a zajmiemy się analizą równania macierzowego Ito

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ \beta, & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} d\xi_5$$

Korzystamy z twierdzenia ([1]), że dla wykładniczej stabilności średniokwadratowej wystarcza, aby dla pewnej istotnie dodatnio określonej formy kwadratowej W rzędu drugiego można było znaleźć istotnie dodatnio określoną formę V rzędu drugiego, spełniającą warunek

$$L(V) = -W$$

L jest różniczkowym operatorem tworzącym procesu będącego rozwiązaniem równania Ito. W naszym przypadku ma on postać ([1]).

$$L(V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}(\beta x + \alpha y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} x^2$$

Przyjmujemy formy kwadratowe V i W w postaci:

$$W = x^2 + y^2, \quad V = \frac{1}{2} V_1 x^2 + V_2 xy + \frac{1}{2} V_3 y^2$$

Wielkość V_1, V_2, V_3 obliczymy z równania $L(V) = -W$

$$L(V) = V_1 xy + V_2 y^2 + V_2 x(\beta x + \alpha y) + V_3 y(\beta x + \alpha y) =$$

$$= (\beta V_2 + \frac{1}{2} V_3)x^2 + (V_1 + \alpha V_2 + \beta V_3)xy + (V_2 + \alpha V_3)y^2$$

Po przyrównaniu tego wyrażenia do - W otrzymamy:

$$\begin{cases} \beta V_2 + \frac{1}{2} V_3 = -1 \\ V_1 + \alpha V_2 + \beta V_3 = 0 \\ V_2 + \alpha V_3 = -1 \end{cases}$$

Z tych równań otrzymujemy

$$V_1 = \frac{\alpha(\frac{1}{2} - \alpha) + \beta(1 - \beta)}{\frac{1}{2} - \alpha\beta}$$

$$V_2 = \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \alpha\beta}$$

$$V_3 = \frac{\beta - 1}{\frac{1}{2} - \alpha\beta}$$

Forma kwadratowa V ma być istotnie dodatnio określona, więc musi być

$$\begin{cases} V_1 > 0 \\ V_1 V_3 - V_2^2 > 0. \end{cases}$$

Po podstawieniu wartości na α i β otrzymujemy

$$V_1 = \frac{\alpha(\frac{1}{2} - \alpha) + \beta(1 - \beta)}{\frac{1}{2} - \alpha\beta} =$$

$$= \frac{-\frac{\eta}{m}(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{m}) - \frac{c_1 + c_2}{m}(1 + \frac{c_1 + c_2}{m})}{\frac{1}{2} - \frac{\eta(c_1 + c_2)}{m^2}}$$

Licznik jest ujemny, więc mianownik też musi być mniejszy od zera

$$\frac{1}{2} - \frac{\eta(c_1 + c_2)}{m^2} < 0 \implies 2\eta(c_1 + c_2) > m^2$$

Rozpatrzymy teraz drugą nierówność

$$V_1V_3 - V_2^2 = \frac{(\frac{1}{2}\alpha - \alpha^2 + \beta - \beta^2)(\beta - 1)}{(\frac{1}{2} - \alpha\beta)^2} - \frac{(\alpha - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2} - \alpha\beta)^2}$$

Mianownik jest dodatni, więc zajmiemy się tylko licznikiem

$$\frac{1}{2}\alpha\beta - \alpha^2\beta + \beta^2 - \beta^3 - \frac{1}{2}\alpha + \alpha^2 - \beta + \beta^2 -$$

$$-\alpha^2 + \alpha - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\alpha\beta - \alpha^2\beta + 2\beta^2 - \beta^3 + \frac{1}{2}\alpha - \beta - \frac{1}{4} > 0$$

Po podstawieniu wartości na α i β otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\,\frac{\eta(c_1 + c_2)}{m^2} + \frac{\eta^2(c_1 + c_2)}{m^3} + \frac{2(c_1 + c_2)^2}{m^2} +$$

$$+ \frac{(c_1 + c_2)^3}{m^3} - \frac{1}{2}\frac{\eta}{m} + \frac{c_1 + c_2}{m} - \frac{1}{4} > 0$$

$$2\eta m(c_1 + c_2) + 4\eta^2(c_1 + c_2) + 8m(c_1 + c_2)^2 + 4(c_1 + c_2)^3 -$$

$$- 2\eta m^2 + 4m^2(c_1 + c_2) - m^3 > 0$$

Pokażemy, że gdy spełniona jest zależność $2\eta(c_1 + c_2) > m^2$, to również spełniona jest powyższa nierówność. W tym celu dwa pierwsze wyrażenia w tej nierówności zastępujemy przez mniejsze

$$2\eta m(c_1 + c_2) > m^3, \quad 4\eta^2(c_1 + c_2) > 2\eta m^2.$$

Otrzymujemy wtedy

$$m^3 + 2\eta m^2 + 8m(c_1 + c_2)^2 + 4(c_1 + c_2)^3 - 2\eta m^2 + 4(c_1 + c_2)m^2 -$$

$$- m^3 = 8m(c_1 + c_2)^2 + 4(c_1 + c_2)^3 + 4m^2(c_1 + c_2) =$$

$$= 4(c_1 + c_2)\left[2m(c_1 + c_2) + (c_1 + c_2)^2 + m^2\right] =$$

$$= 4(c_1 + c_2)\left[m + (c_1 + c_2)\right]^2 =$$

$$= 4(c_1 + c_2)(m + c_1 + c_2)^2.$$

To wyrażenie jest zawsze dodatnie. Ostateczne oszacowanie ma więc postać

$$2\eta(c_1 + c_2) > m^2$$

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1974 r.

LITERATURA

[1] Skalmierski B., Tylikowski A.: Stabilność w mechanice. PTMTiS, Gliwice 1972.

[2] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice. PWN, Warszawa 1972.

[3] Хасьминский Р.З.: Устойчивость систем дифференциальных уравненьй при случайных возмущениях их параметров, Наука, Москва 1969.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В работе исследовано устойчивость механической системы принимая, что вынуждение это процесс случайности.

Принято тоже, что постоянные пружин носят харяктер вероятности. Подано достаточное условие, чтобы положение вокруг которого система производит действительные колебания было положением постоянного равновесия при случайной вынуждении.

STOCHASTIC STABILITY INVESTIGATION OF A CERTAIN MECHANICAL SYSTEM

S u m m a r y

The stability of a certain mechanical system has been investigated assuming that the input function is a stochastic process. It has been also assumed that the spring constants are of an incidental character. A condition sufficient for the position round which the system executes deterministic vibrations to be one of stable equilibrium at stochastic input function has been given.