Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Jan STOLARZ

# O PEWNYM PROBLEMIE PLANOWANIA DYNAMICZNEGO

Streszczenie. W niniejszej pracy rozważa się funkcję rzeczywistą $f$, zmiennej rzeczywistej $x$ przebiegającej przedział $X = [0,\alpha]$, o wartościach $f(x) = \sup\{F(x,y) : y \in S(x)\}$, gdzie $S$ jest daną funkcją przyporządkowującą każdej liczbie $x \in X$ zbiór $S(x)$ uporządkowanych par $y = (\{p_n\}, \{q_n\})$ wszystkich ciągów liczbowych $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ o wyrazach nieujemnych i takich, że $p_1 + q_1 \leqslant x$, $p_n + q_n \leqslant$

$$\leqslant x - \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1-a)p_k + (1-b)q_k\right] \quad n = 2,3,\ldots,$$

gdzie $a$ i $b$ są danymi liczbami z przedziału $(0,1)$, $F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g(p_n) + h(q_n)\right]$, przy czym $g$ i $h$ są danymi funkcjami ciągłymi i nieujemnymi w $X$, a ponadto $g(0) = h(0) = 0$. Zagadnienie polegające na wyznaczaniu funkcji $f$, zgodnie z terminologią wprowadzoną przez J. Łosia w [2], jest pewnym problemem planowania dynamicznego i ma szerokie zastosowanie w tej dziedzinie. W pracy dowodzi się między innymi, że jeśli $g(x)$ $g'_+(0)x$ i $h(x) \leqslant h_+(0)x$, dla $x \in X$, to $f(x) = x \max\left[g'_+(0)(1-a)^{-1}\right.$ $\left.h'_+(0)(1-b)^{-1}\right]$. W przypadku gdy $g$ i $h$ są funkcjami wypukłymi w $X$, funkcja $f$ jest jednoznacznym rozwiązaniem pewnego ekstremalnego równania funkcyjnego.

Dane są dwie funkcje rzeczywiste $g$ i $h$ jednej zmiennej rzeczywistej $x$ przebiegającej przedział $X = [0,\alpha]$, ciągłe i nieujemne w tym przedziale, przy czym $g(0) = h(0) = 0$ oraz istnieje liczba $C$ taka, że $g(x) \leqslant Cx$ i $h(x) \leqslant Cx$ dla każdego $x \in X$. Ponadto dana jest funkcja $S$ przyporządkowująca każdej liczbie $x \in X$ zbiór $S(x)$ uporządkowanych par $y = (\{p_n\}, \{q_n\})$ wszystkich ciągów liczbowych $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ o wyrazach nieujemnych i takich, że

$$p_1 + q_1 \leqslant x,$$
$$p_n = q_n \leqslant x - \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1-a)p_k + (1-b)q_k\right], \quad n = 2,3,\ldots, \tag{1}$$

gdzie $a$ i $b$ są danymi liczbami z przedziału $(0,1)$. Niech $x$ będzie dowolną ale chwilowo ustaloną liczbą z przedziału $X$, a $y = (\{p_n\}, \{q_n\})$ dowolnym elementem zbioru $S(x)$.

Wykażemy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[g(p_n) + h(q_n)\right]. \qquad (2)$$

Udowodnimy najpierw, że dla każdego $n = 1,2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[g(p_k) + h(q_k)\right] \leqslant C(1-c)^{-1}x, \tag{3}$$

gdzie $c = \max(a,b)$. Korzystając z (1) i zakładając, że dla pewnego $n$

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k) \leqslant x\sum_{k=1}^{n}c^{k-1},$$

otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(p_k + q_k) \leqslant x + \sum_{k=1}^{n}(ap_k + bq_k) \leqslant x + x\sum_{k=1}^{n}c^k = c\sum_{k=1}^{n+1}c^{k-1},$$

co oznacza, że

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k) \leqslant x\sum_{k=1}^{n}c^{k-1} < (1-c)^{-1}x$$

dla każdego $n$. Stąd i z nierówności

$$\sum_{k=1}^{n}\left[g(p_k) + h(q_k)\right] \leqslant C\sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k)$$

wynika nierówność (3), która wraz z nieujemnością wyrazów szeregu (2) daje jego zbieżność.

Niech $F$ będzie funkcją określoną w zbiorze

$$P = \left\{(x,y) : x \in X, \quad y = (\{p_n\}, \{q_n\}) \in S(x)\right\},$$

o wartościach

$$F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g(p_n) + h(q_n)\right].$$

Z (3) wynika, że $F(x,y) = C(1-c)^{-1}x$ dla każdego $y \in S(x)$. Zatem dla każdego $x \in X$ istnieje $\sup\{F(x,y) : y \in S(x)\}$.
Rozważać będziemy funkcję rzeczywistą $f$, zmiennej rzeczywistej $x$ przebiegającej zbiór $X$, o wartościach:

$$f(x) = \sup\{F(x,y) : y \in S(x)\}.$$

Zagadnienie polegające na wyznaczeniu funkcji $f$, zgodnie z terminologią wprowadzoną przez J. Łosia w pracy [2] jest pewnym problemem planowania dynamicznego i ma szerokie zastosowanie w tej dziedzinie (p. [1], [3]) Niech

$$F_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left[g(p_k) + h(q_k)\right], \qquad (x,y) \in P, \qquad n = 1,2, \ldots,$$

Z uwagi na nierówność (3) możemy określić dla każdego $x \in X$ ciąg

$$f_n(x) = \sup\{F_n(x,y) : y \in S(x)\}.$$

Łatwo zauważyć, że dla każdego $x \in X$

$$f_1(x) = \sup\{g(p) + h(q) : p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad p + q \leqslant x\} \tag{4}$$

$$f_n(x) = \sup\{g(p) + h(q) + f_{n-1}(ap+bq+x-p-q) : p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad p + q \leqslant x\},$$

$$n = 2,3, \ldots$$

TWIERDZENIE 1. Dla każdego $x \in X$ $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Funkcja $f$ jest rozwiązaniem równania

$$f(x) = \sup\{g(p) + h(q) + f(ap+bq+x-p-q) : p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad p + q \leqslant x\}. \tag{5}$$

D o w ó d. Niech $x$ będzie dowolną, ale chwilowo ustaloną liczbą z przedziału $X$. Z (4) wynika łatwo niemalenie ciągu $\{f_n(x)\}$, a z (3) jego ograniczoność. Zatem istnieje funkcja $\overline{f}$ taka, że dla każdego $x \in X$,

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{f}(x)$. Z nierówności $F_n(x,y) \leqslant F(x,y)$ dla każdego $y \in S(x)$, $n = 1,2, \ldots,$ wynika nierówność $f_n(x) \leqslant f(x)$, $n = 1,2, \ldots,$ a stąd po przejściu do granicy otrzymujemy

$$\overline{f}(x) \leqslant f(x) \quad \text{dla każdego} \quad x \in X. \tag{6}$$

Ponieważ $F_n(x,y) \leqslant f_n(x)$ i $\lim_{n\to\infty} F_n(x,y) = F(x,y)$ dla każdego $y \in S(x)$, więc $F(x,y) \leqslant \overline{f}(x)$. Stąd wynika nierówność $f(x) \leqslant \overline{f}(x)$, która wraz z nierównością (6) kończy dowód pierwszej części twierdzenia. Druga część twierdzenia wynika z twierdzenia 2 podanego w [4]. Równanie (5) posiada nieskończenie wiele rozwiązań (p. [4] tw. 1) i z tego powodu nie określa jednoznacznie funkcji $f$.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli funkcje $g$ i $h$ są wypukłe w przedziale $X$, to funkcja $f$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równania

$$H(x) = \sup\{g(p) + h(q) + H(ap + bq) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\} \tag{7}$$

w klasie funkcji ciągłych prawostronnie w zerze i posiadających w nim wartości zero.

D o w ó d. Z wypukłości funkcji $g$ i $h$ w przedziale $X$ wynika wypukłość funkcji $G(p,q) = g(p) + h(q)$ w zbiorze $R(x) = \{(p,q) : p \geqslant 0\ q \geqslant 0\ p + q \leqslant x\}$ dla każdego $x \in X$. Stąd i z (4) oraz na mocy nieujemności funkcji $g$ i $h$ w przedziale $X$ (8) $f_1(x) = \max[g(x),\ h(x)]$ dla każdego $x \in X$ Zatem funkcja $f_1$ jest wypukła w $X$. Korzystając z (4) łatwo wykazać na drodze analogicznego rozumowania, że z wypukłości funkcji $f_n$ w $X$ wynika wypukłość funkcji $f_{n+1}$ w tym przedziale, a to wraz z zasadą indukcji matematycznej oznacza wypukłość każdej funkcji ciągu $\{f_n\}$ w przedziale $X$. Stąd wynika, że

$$f(x) = \max\left[f_{n-1}(x),\ g(x) + f_{n-1}(ax),\ h(x) + f_{n-1}(bx)\right], \tag{9}$$

$$x \in X, \quad n = 2,3, \ldots$$

Ponieważ $f_1$ jest funkcją nieujemną w $X$, więc dla każdego $x \in X$ $\max[g(x) + f_1(ax),\ h(x) + f_1(bx)] \geqslant \max[g(x),\ h(x)] = f_1(x)$, a stąd oraz z (9) otrzymujemy $f_2(x) = \max[g(x) + f_2(ax),\ h(x) + f_1(bx)]$ dla $x \in X$. Załóżmy, że dla pewnego $n \geqslant 2$

$$f_n(x) = \max\left[g(x) + f_{n-1}(ax),\ h(x) + f_{n-1}(bx)\right]. \tag{10}$$

Stąd i z niemalenia ciągu $\{f_n(x)\}$ wynika, że

$$\max\left[g(x) + f_n(ax),\ h(x) + f_n(bx)\right]$$

$$\geqslant \max\left[g(x) + f_{n-1}(ax),\ h(x) + f_{n-1}(bx)\right] = f_n(x).$$

Zatem i na mocy (9)

$$f_{n+1}(x) = \max\left[g(x) + f_n(ax),\ h(x) + f_n(bx)\right],$$

co oznacza prawdziwość równości (10) dla każdego $n = 2,3, \ldots$ i dowolnego $x \in X$. Korzystając z wypukłości funkcji $g$, $h$ i $f_n$, $n = 1,2, \ldots$ otrzymujemy:

$$\sup\left\{g(p) + h(q) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\} = \max\left[g(x),\ h(x)\right],$$

$$\sup\left\{g(p) + h(q) + f_{n-1}(ap + bq) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\}$$

$$= \max\left[g(x) + f_{n-1}(ax),\ h(x) + f_{n-1}(bx)\right], \quad n = 2,3, \ldots,$$

a stąd oraz na mocy (8) i (10)

$$f_1(x) = \sup\left\{g(p) + h(q) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\},$$

$$f_n(x) = \sup\left\{g(p) + h(q) + f_{n-1}(ap + bq) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\}$$

$$n = 2,3, \ldots$$

Ponieważ dla każdego $n = 1,2, \ldots$

$$f_n(x) \leqslant \sup\left\{g(p) + h(q) + f(ap + bq) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\}$$

i

$$f_n(x) \geqslant g(p) + h(q) + f_{n-1}(ap + bq), \quad \text{dla } p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x,$$

więc

$$f(x) \leqslant \sup\left\{g(p) + h(q) + f(ap + bq) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\} \tag{11}$$

oraz

$$f(x) \geqslant g(p) + h(q) + f(ap + bq),\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że

$$f(x) = \sup\left\{g(p) + h(q) + f(ap + bq) : p > 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\}.$$

Zatem i na mocy (11) funkcja $f$ jest rozwiązaniem równania (7). Ponieważ $f(0) = 0$ i $0 \leqslant f(x) \leqslant C(1-c)^{-1}x$ dla $x \in X$, więc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, skąd wynika ciągłość prawostronna funkcji $f$ w zerze. Równanie (7) przy naszych założeniach posiada jednoznaczne rozwiązanie w klasie funkcji ciągłych prawostronnie w zerze i posiadających w nim wartość zero (p. [1] tw. 1). Wobec tego funkcja $f$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (7).

TWIERDZENIE 3. Jeżeli $g$ i $h$ są funkcjami liniowymi w przedziale $X$, to $f$ jest również funkcją liniową w $X$ i jest określona wzorem $f(x)=Mx$ $M = \max\left[A(1-a)^{-1}, B(1-b)^{-1}\right]$, gdzie $A$ i $B$ są odpowiednio współczynnikami kierunkowymi funkcji $g$ i $h$.

D o w ó d. Wystarczy pokazać, że funkcja $f(x) = Mx$ jest rozwiązaniem równania (7). Niech $M = A(1-a)^{-1}$.
W takim razie

$$A + Ma = (1-a)M + Ma = M$$

$$B + Mb = (1-b) \cdot B(1-b)^{-1} + Mb = (1-b)M + Mb = M.$$

Wobec tego

$$\sup\left\{Ap + Bq + M(ap + bq) : p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q = x\right\}$$

$$= x \max(A + Ma,\ B + Mb) = Mx$$

W przypadku gdy $M = B(1-b)^{-1}$, dowód przebiega analogicznie.

TWIERDZENIE 4. Jeżeli istnieje liczba $x_1 \in (0,\alpha)$ taka, że w przedziale $[0,x_1]$ $g$ i $h$ są funkcjami liniowymi o współczynnikach kierunkowych odpowiednio $a_g$ i $a_h$, to dla każdego $x \in X$

$$f(x) \geqslant x \max\left[a_g(1-a)^{-1},\ a_h(1-b)^{-1}\right].$$

D o w ó d. Prawdziwość twierdzenia w przedziale $[0,x_1]$ wynika z twierdzenia 3. Niech $x$ będzie liczbą z przedziału $(x_1,\alpha]$ chwilowo ustaloną oraz $x_2, \ldots, x_N = x$ punktami z przedziału $(x_1, x]$ takimi, że dla każdego $k = 2, \ldots, N$ $0 < x_k - x_{k-1} \leqslant (1-a)x_1$. Na mocy twierdzenia 1 dla każdego

$$u \in X \; f(u) \geqslant g(p) + f\left[u + (a-1)p\right],$$

gdzie $p$ jest dowolną liczbą z przedziału $[0,u]$. Zatem i na mocy założenia dla każdego $u \in [x_1, \alpha]$ i dowolnego $p \in [0,x_1]$

$$\frac{f(u) - f[u + (a - 1)p]}{p(1 - a)} \geqslant \frac{g(p)}{p(1 - a)} = \frac{a_g}{1 - a}$$

Podstawiając w ostatniej nierówności

$$u = x_k, \quad p = \frac{x_k - x_{k-1}}{1 - a}, \quad k = 2, \ldots, N$$

otrzymujemy:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \geqslant \frac{a_g}{1 - a} \quad \text{dla} \quad k = 2, \ldots, N.$$

Na mocy twierdzeria 3 $f(x_1) \geqslant a_g(1-a)^{-1}x_1$. Zakładając, że dla pewnego $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ $f(x_n) \geqslant a_g(1-a)^{-1}x_n$ oraz korzystając z (12) otrzymujemy:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}(x_{n+1} - x_n) \geqslant \frac{a_g}{1 - a} x_{n+1}$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność $f(x_n) \geqslant a_g(1-a)^{-1}x_n$ jest prawdziwa dla każdego $n = 1,2, \ldots, N$. Ponieważ $x_N = x$, więc

$$f(x) \geqslant a_g(1-a)^{-1}x$$

dla każdego $x \in X$. Podobnie dowodzi się nierówność

$$f(x) \geqslant a_h(1-b)^{-1}x$$

dla każdego $x \in X$, która wraz z poprzednią daje tezę twierdzenia.

TWIERDZENIE 5. Jeżeli istnieją pochodne prawostronne $g_+(0)$ i $h_+(0)$, a ponadto dla każdego $x \in X$ $g(x) \leqslant g_+(0)x$ i $h(x) = h_+(0)x$, to funkcja $f$ w przedziale $X$ określona jest wzorem

$$f(x) = x \max\left[g_+'(0)(1-a)^{-1}, h_+'(0)(1-b)^{-1}\right].$$

D o w ó d. Przeprowadzimy najpierw w przypadku gdy $g'_+(0) > 0$ i $h'_+(0) > 0$. Stąd i z założenia wynika istnienie takiego ciągu liczb $x_n \in (0,\alpha)$, że dla każdego $x \in [0,x_n]$ $g(x) \geqslant \left[g'_+(0) - \frac{d}{n}\right]x$ i $h(x) \geqslant \left[h'_+(0) - \frac{d}{n}\right]x$ dla dowolnego $n = 1,2, \ldots,$ gdzie

$$d = \min\left[g'_+(0),\ h'_+(0)\right].$$

Rozważmy następnie dwa ciągi funkcyjne

$$g_n(x) = \begin{cases} \left[g'_+(0) - \frac{d}{n}\right]x & \text{dla} \quad x \in [0,x_n] \\ \bar{g}_n(x) & \text{dla} \quad x \in (x_n, \ ], \end{cases}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} \left[h'_+(0) - \frac{d}{n}\right]x & \text{dla} \quad x \in [0,x_n] \\ \bar{h}_n(x) & \text{dla} \quad x \in (x_n, \ ], \end{cases}$$

gdzie $\bar{g}_n$ i $\bar{h}_n$, $n = 1,2, \ldots,$ są dowolnie ustalonymi funkcjami nieujemnymi w swojej dziedzinie, spełniającymi następujące warunki:

$$\lim_{x \to x_n} \bar{g}_n(x) = \left[g'_+(0) - \frac{d}{n}\right]x_n, \quad \lim_{x \to x_n} \bar{h}_n(x) = \left[h'_+(0) - \frac{d}{n}\right]x_n,$$

$$g(x) \geqslant \bar{g}_n(x) \quad \text{i} \quad h(x) \geqslant \bar{h}_n(x) \quad \text{dla} \quad x \in (x_n, \alpha]$$

Ponieważ dla każdego $n = 1,2, \ldots$

$$g_n(x) \leqslant g(x) \leqslant g'_+(0)x \quad \text{i} \quad h_n(x) \leqslant h(x) = h'_+(0)x \quad \text{dla} \quad x \in X,$$

więc na mocy twierdzenia 3 i 4 nie trudno zauważyć, że

$$x \max\left[\left(g'_+(0) - \frac{d}{n}\right)(1-a)^{-1},\ \left(h'_+(0) - \frac{d}{n}\right)(1-b)^{-1}\right] \leqslant f(x)$$

$$\leqslant x \max\left[g'_+(0)(1-a)^{-1},\ h'_+(0)(1-b)^{-1}\right]$$

dla $x \in X$ i każdego $n = 1,2, \ldots$ Stąd po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ otrzymujemy tezę twierdzenia. Jeżeli w powyższym dowodzie przyjmiemy $g_n(x) = 0$ dla $x \in X$ i każdego $n = 1,2, \ldots$ oraz $d = h'_+(0)$ w określeniu ciągu $\{h_n(x)\}$, to otrzymamy dowód twierdzenia w przypadku $g'_+(0) = 0$, $h'_+(0) > 0$. Podobnie jest w pozostałych przypadkach.

Na zakończenie zauważmy jeszcze, że otrzymane wyniki są również słuszne w przedziale $X = [0, +\infty)$.

Wpłynęło do Redakcji w wrześniu 1974 r.

LITERATURA


[1] Bellman R.: Dynamic programming. Princeton 1957.

[2] Łoś J.: Horyzont w planowaniu dynamicznym z dyskretnym czasem. Prace bieżące Instytutu Matematycznego PAN nr 4, 1965.

[3] Sobieszek W., Stolarz J.: O niejednoznaczności rozwiązań równania $f(x) = \sup[g(y_1) + h(y_2) + f(ay_1 + by_2 + x - y_1 - y_2)]$. $y_1 + y_2 \leqslant x$. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Matematyka-Fizyka z. 15 1970.

[4] Stolarz J.: O rozwiązaniach pewnego ekstremalnego równania funkcyjnego. Zeszyty Naukowe Politechniki Slaskiej w Gliwicach. Seria: Matematyka-Fizyka z. 25, 1974.


ОБ ОДНОЙ ИЗ ПРОБЛЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ


Р е з ю м е

В данной работе рассматривается действительная функция $f(x)$, где $x$ - действительное переменное из интервала $X=[0,\alpha]$. $f(x)=\sup\{F(x,y): y \in S(x)\}$, где $S$ является функцией ставлящей в соответствие каждому значению $x \in X$ множество $S(x)$ упорядоченных пар $y = (\{p_n\}, \{q_n\})$ всевозможных числовых последовательностей $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ неотрицательных чисел таких что $p_1+q_1 \leqslant x$, $p_n + q_n \leqslant x - \sum_{k=1}^{n-1} [(1-a)p_k + (1-b)q_k]$, $n = 2,3, \ldots$, где $a$ и $b$ лежат в интервале $(0,1)$. $F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [g(p_n) + h(q_n)]$ где $g$ и $h$ данные непрерывные функции в $X$ и $g(0) = h(0) = 0$.

Задача отыскания функции $f$ является определенной проблемой динамического планирования согласно терминологии Лося [2]. В работе показывается что если $g(x) \leqslant g'_+(0)x$ и $h(x) \leqslant h'_+(0)x$ то $f(x) = x \max[g'_+(0)(1 - a)^{-1}, h'_+(0)(1-b)^{-1}]$. В случае если $g$ и $h$ являются выпуклыми функциями в $X$, то функция $f$ является однозначным решением некоторого экстремального функционального уравнения.

ON SOME PROBLEM OF THE DYNAMIC PLANNING


Summary

In this paper it is considerated the real function $f$ of real variable $x$ from the interval $X = [0, \alpha]$ and with values $f(x) = \sup\{F(x,y): y \in S(x)\}$ Here $S$ is the given function, which assigns to each number $x \in X$ the set $S(x)$ of ordered pairs of all number sequences $\{p_n\}$ and $\{q_n\}$, where $p_n \geq 0$ $q_n \geq 0$, $p_1 + q_1 \leq x$, $p_n + g_n \leq x - \sum_{k=1}^{n-1} [(1-a)p_k + (1-b)q_k]$, $n = 2, 3, \ldots$ and $a, b$ are the given numbers from the interval $(0,1)$.
$F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [g(p_n) + h(q_n)]$, whre $g$ and $h$ are the given functions, continuous and non-negative in $X$, and $g(0) = h(0) = 0$. The problem of the determination of the function $f$, according to the terminology which J. Łoś had introduced in [2], is a some problem of the dynamic planning and has a vast application in this field. In the paper it is proved, (among others) that if $g(x) \leq g'_+(0)x$ and $h(x) \leq h'_+(0)x$ for $x \in X$, then $f(x) = x \max[g'_+(0)(1-a)^{-1}, h'_+(0)(1-b)^{-1}]$. In the case when $g$ and $h$ are the convex functions in $X$, the function $f$ is the unique solution of the some extremal functional equation.