ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Stanisław KIEŁTYKA, Wiesław SOBIESZEK

PEWNE TOPOLOGICZNE WŁASNOŚCI PRZEKSZTAŁCEŃ PUNKTOWO-ZBIOROWYCH I FUNKCJI MAKSIMUM

I. W pracy niniejszej uogólnia się pewne twierdzenie dotyczące własności topologicznych funkcji maksimum (p. [1] i [3]) oraz udowadnia się pewne nowe własności przekształceń punktowo-zbiorowych.

Przekształceniem punktowo-zbiorowym nazywa się takie przekształcenie f które każdemu punktowi $x \in X$ przyporządkowuje pewien podzbiór $f(x)$ ustalonego zbioru Y; symbolicznie $f: X \to 2^Y$.

Funkcją maksimum nazywa się natomiast funkcję

$$M(x) = \sup_{y \in f(x)} \varphi(x,y), \qquad x \in X,$$

gdzie φ jest daną funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na wykresie G_f przekształcenia punktowo-zbiorowego f, przy czym

$$G_f = \{(x,y): x \in X,\ y \in f(x)\}$$

II. Na użytek dalszych rozważań przytoczymy pewne definicje oraz twierdzenia znajdujące się w pracy [1]. W tym paragrafie, jak i w dalszych, zakłada się, że X i Y są przestrzeniami topologicznymi. O zbiorach obrazach $f(x)$ zakładamy, że są niepuste dla każdego $x \in X$.

DEFINICJA 1. Przekształcenie $f: X \to 2^Y$ nazywać będziemy półciągłym z dołu (p.z.d.) w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla każdego otwartego zbioru U takiego, że $U \cap f(x_0) \neq \emptyset$, istnieje otoczenie $V(x_0)$ punktu x_0, że

$$(x \in V(x_0)) \Rightarrow (f(x) \cap U \neq \emptyset)$$

DEFINICJA 2. Przekształcenie $f: X \to 2^Y$ nazywać będziemy półciągłym z góry (p.z.g.) w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla każdego otwartego zbioru U, zawierającego zbiór $f(x_0)$, istnieje otoczenie $V(x_0)$ punktu x_0 takie, że

$$(x \in V(x_0)) \Rightarrow (f(x) \subset U)$$

DEFINICJA 3. Przekształcenie $f\colon X \to 2^Y$ p.z.d. i p.z.g. w każdym punkcie zbioru X i mające zwarte zbiory obrazy $f(x)$ dla każdego $x \in X$ nazywać będziemy ciągłym w X.

DEFINICJA 4. Przekształcenie $f\colon X \to 2^Y$ nazywać będziemy domkniętym w punkcie $x_0 \in X$ jeżeli dla dowolnego punktu $y_0 \in Y$ i $y_0 \notin f(x_0)$ istnieją otoczenia $V(x_0)$ i $U(y_0)$ odpowiednio punktów x_0 i y_0 takie, że

$$(x \in V(x_0)) \Rightarrow (f(x) \cap U(y_0) = \emptyset)$$

TWIERDZENIE 1. Jeżeli $f\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem p.z.d. i funkcja $\varphi\colon X \times Y \to R$ jest p.z.d., to funkcja $M(x) = \sup\limits_{y \in f(x)} \varphi(x,y)$ jest p.z.d.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli $f\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem p.z.g. o zwartych zbiorach obrazach $f(x)$ i $\varphi\colon X \times Y \to R$ jest funkcją p.z.g., to funkcja $M(x) = \max\limits_{y \in f(x)} \varphi(x,y)$ jest p.z.g.

TWIERDZENIE 3. Jeżeli $f\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem ciągłym i $\varphi\colon Y \to R$ jest funkcją ciągłą, to funkcja $M(x) = \max\limits_{y \in f(x)} \varphi(y)$ jest ciągła w X i $\tilde{f}(x) = \{y \mid y \in f(x),\ \varphi(y) = M(x)\}$ jest przekształceniem p.z.g. o zwartych zbiorach obrazach.

DEFINICJA 5. Rodzinę zbiorów $K = \{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ zwartych w Y nazywać będziemy selekcją (względem funkcji $\varphi\colon Y \to R$), jeżeli dla każdego $\alpha \in A$ istnieje dokładnie jeden element a_α, że $a_\alpha \in K_\alpha$ i $\varphi(a_\alpha) = \max\limits_{y \in K_\alpha} \varphi(y)$.

TWIERDZENIE 5. Niech $f\colon X \to 2^Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Jeżeli rodzina $\{f(x) \mid x \in X\}$ jest selekcją, to istnieje przekształcenie $\sigma\colon X \to Y$, że $\sigma(x) \in f(x)$ dla każdego $x \in X$.

TWIERDZENIE 6. Jeżeli $f_1\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem domkniętym i $f_2\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem p.z.g. o zwartych zbiorach obrazach $f_2(x)$ to przekształcenie $f = f_1 \cap f_2$ jest p.z.g. o zwartych zbiorach obrazach $f(x) = f_1(x) \cap f_2(x)$.

TWIERDZENIE 7. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby $f\colon X \to 2^Y$ było przekształceniem p.z.g. jest, aby dla każdego otwartego zbioru U w Y zbiór $f^+(U)$ był otwarty w X, gdzie $f^+(U) = \{x \in X : f(x) \subset U\}$.

III. W dalszych rozważaniach przyjmujemy za przestrzeń Y zbiór $f(X) = \bigcup\limits_{x \in X} [f(x)]$, zwany obrazem zbioru X przy przekształceniu f.

DEFINICJA 6. Niech $f: X \to 2^Y$ będzie przekształceniem p.z.d. Funkcję $\varphi: G_f \to R$ nazywać będziemy f - półciągłą z dołu[1] (f.p.z.d.) w punkcie $(x_0,y_0) \in G_f$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją otoczenia $V(x_0)$ i $U(y_0)$ odpowiednio punktów x_0 i y_0 takie, że dla każdego $x \in V(x_0)$ istnieje $y \in f(x) \cap U(y_0)$ takie, że $\varphi(x,y) \geq \varphi(x_0,y_0) - \varepsilon$.

Uwaga 1. Funkcja $\varphi: G_f \to R$ p.z.d. jest f.p.z.d., ale nie odwrotnie, o czym świadczy następujący

Przykład 1. Niech $X = [0,2]$, $Y = [0,2]$, $f(x) = \{x, -x+2\}$ dla każdego $x \in X$.
Powyższe przekształcenie jest ciągłe, a więc w szczególności jest ono p.z.d w X. Rozważmy funkcję $\varphi: X \times Y \to R$ daną wzorem

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (x-y)\sin(x-1)/2(x-1)^2 - (2-x-y)\left(2^{\frac{1}{1-x}}-1\right)/(2-2x)\left(2^{\frac{1}{1-x}}+1\right) & \\ \qquad\qquad\qquad \text{dla } (x,y) \neq (1,y),\ y \in Y \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{dla } (x,y) = (1,y),\ y \in Y. \end{cases}$$

Jeżeli funkcję φ rozważymy na wykresie G_f przekształcenia f, to jak łatwo sprawdzić, jest ona f.p.z.d. w punkcie (1.1), a nie jest w tym punkcie p.z.d.
Udowodnimy obecnie trzy twierdzenia będące uogólnieniami twierdzeń 1, 2 i 3.

TWIERDZENIE 1'. Jeżeli $f: X \to 2^Y$ jest przekształceniem p.z.d. i $\varphi: G_f \to R$ jest funkcją f.p.z.d., to funkcja $M(x) = \sup\limits_{y \in f(x)} \varphi(x,y)$ jest p.z.d w X.

D o w ó d. Niech $x_0 \in X$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $y_0 \in f(x_0)$ że $\varphi(x_0,y_0) \geq M(x_0) - \varepsilon$. Z f.p.z.d. funkcji φ na G_f wynika istnienie otoczeń $V(x_0)$ i $U(y_0)$ takich, że dla każdego $x \in V(x_0)$ istnieje $y \in f(x) \cap U(y_0)$ i $\varphi(x,y) \geq \varphi(x_0,y_0) - \varepsilon \geq M(x_0) - 2\varepsilon$. Z założenia p.z.d. przekształcenia f wynika istnienie otoczenia $V'(x_0)$ punktu x_0 takiego, że dla każdego $x \in V'(x_0)$ jest $f(x) \cap U(y_0) \neq \emptyset$. Zachodzi więc implikacja

$$(x \in V(x_0) \cap V'(x_0)) \Rightarrow (M(x) \geq M(x_0) - 2\varepsilon)$$

[1] Definicja funkcji f.p.z.d. na $G_f \subset R^n \times R^m$ wprowadzona została po raz pierwszy w pracy [3].

TWIERDZENIE 2'. Jeżeli $f\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem p.z.g. o zwartych zbiorach obrazach $f(x)$ i funkcja $\varphi\colon G_f \to R$ jest p.z.g., to funkcja $M(x) = \max\limits_{y \in f(x)} \varphi(x,y)$ jest p.z.g.

D o w ó d. Niech $x_0 \in X$, $y \in f(x_0)$. Istnieją otoczenia $V_y(x_0)$ i $U(y)$ takie, że dla każdego $(x,z) \in (V_y(x_0) \times U(y)) \cap G_f$ jest $\varphi(x,z) \leqslant \varphi(x_0,y) + \varepsilon$. Ponieważ zbiór $f(x_0)$ jest zwarty, więc ma skończone pokrycie $U(y_1)$, $U(y_2)$, ..., $U(y_n)$. Przyjmijmy $V'(x_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}(x_0)$ i $U[f(x_0)] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(y_i)$. Wówczas dla $(x,y) \in (V'(x_0) \times U[f(x_0)]) \cap G_f$ mamy $\varphi(x,y) \leqslant \max\limits_{i} \varphi(x_0,y_i) + \varepsilon \leqslant M(x_0) + \varepsilon$. Z założenia p.z.g. przekształcenia f wynika istnienie otoczenia $V(x_0)$ takiego, że $x \in V(x_0) \Rightarrow f(x) \subset U[f(x_0)]$.
Zatem

$$(x \in V'(x_0) \cap V(x_0)) \Rightarrow (M(x) = \max_{y \in f(x)} \varphi(x,y) \leqslant M(x_0) + \varepsilon)$$

Wniosek 1. Jeżeli $f\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem ciągłym i $\varphi\colon G_f \to R$ jest funkcją f.p.z.d. oraz p.z.g., to funkcja $M(x) = \max\limits_{y \in f(x)} \varphi(x,y)$ jest ciągła.

TWIERDZENIE 3'. Jeżeli spełnione są założenia wniosku 1, to przekształcenie $\tilde{f}$ dane wzorem $\tilde{f}(x) = \{y \mid y \in f(x),\ \varphi(x,y) = M(x) = \max\limits_{z \in f(x)} \varphi(x,z)\}$ jest p.z.g. o zwartych zbiorach obrazach.

D o w ó d. Przekształcenie $\tilde{f}$ jest domknięte Istotnie, niech $x_0 \in X$ i $y_0 \notin \tilde{f}(x_0)$, wówczas możliwe są dwa przypadki:
1^o $y_0 \in Y$ i $y_0 \notin f(x_0)$
2^o $y_0 \in f(x_0)$ i $y_0 \notin \tilde{f}(x_0)$.

W pierwszym przypadku z domkniętości przekształcenia f wynika istnienie otoczeń $V(x_0)$ i $U(y_0)$ takich, że

$$(x \in V(x_0)) \Longrightarrow (f(x) \cap U(y_0) = \emptyset)$$

Ponieważ $\tilde{f}(x) \subset f(x)$ dla każdego $x \in X$, więc prawdziwa jest także implikacja $(x \in V(x_0)) \Rightarrow (\tilde{f}(x) \cap U(y_0) = \emptyset)$.

W przypadku 2^o mamy

$$\varphi(x_0,y_0) < M(x_0)$$

Stąd, wobec ciągłości funkcji M, otrzymujemy nierówność $\varphi(x_0,y_0) < M(x) - \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i każdego x z pewnego otoczenia $V(x_0)$ punktu x_0. Z p.z.g. funkcji φ wynika istnienie otoczeń $V(x_0)$ i $U(y_0)$ takich, że

$\varphi(x,y) \leqslant \varphi(x_0,y_0) + \varepsilon$ dla $x \in V'(x_0)$ i $y \in f(x) \cap U(y_0)$. Zatem, dla $x \in V(x_0) \cap V'(x_0)$ i $y \in f(x) \cap U(y_0)$, mamy $\varphi(x,y) < M(x)$, co oznacza prawdziwość implikacji

$$(x \in V(x_0) \cap V'(x_0)) \Rightarrow ((f(x) \cap U(y_0)) \cap \tilde{f}(x) = \emptyset).$$

Stąd, ponieważ $\tilde{f}(x) \subset f(x)$ dla każdego $x \in X$, otrzymujemy implikację

$$(x \in V(x_0) \cap V'(x_0)) \Rightarrow (\tilde{f}(x) \cap U(y_0) = \emptyset)$$

Ponieważ przekształcenie $\tilde{f}$ można przedstawić jako iloczyn przekształcenia f p.z.g. o zwartych zbiorach obrazach i przekształcenia domkniętego $\tilde{f}$, więc (p. tw. 6) jest ono p.z.g. i ma zwarte zbiory obrazy.

IV. W punkcie tym zajmiemy się pewnymi własnościami przekształceń punktowo-zbiorowych.

TWIERDZENIE 8. Niech $f: X \to 2^Y$ będzie przekształceniem p.z.g. o spójnych zbiorach obrazach $f(x)$. Wówczas ze spójności przestrzeni X wynika spójność jej obrazu $f(X)$.

D o w ó d. Przypuśćmy, że $f(X)$ nie jest przestrzenią spójną. Wówczas istnieją zbiory A i B otwarte w $f(X)$ i takie, że $f(X) = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$. Ponieważ $f(X) = \bigcup_{x \in X} f(x)$, więc $f(x) \subset A \cup B$ dla każdego $x \in X$. Z drugiej strony, ze spójności obrazów wynika, że dla każdego $x \in X$ jest $f(x) \subset A$ albo $f(x) \subset B$. W przeciwnym bowiem wypadku dla pewnego $x_0 \in X$ mielibyśmy $f(x_0) \subset A \cup B$, $f(x_0) \cap A \neq \emptyset$ i $f(x_0) \cap B \neq \emptyset$. Oznaczałoby to możliwość przedstawienia zbioru $f(x_0)$ jako sumy dwóch zbiorów $f^1(x_0)$ i $f^2(x_0)$ niepustych i takich, że $f^1(x_0) \subset A$ i $f^2(x_0) \subset B$, co przeczy spójności zbioru $f(x_0)$. Wobec powyższego

$$X = f^+(A) \cup f^+(B), \quad \text{gdzie} \quad f^+(A) = \{x \mid x \in X,\ f(x) \subset A\},$$

$$f^+(B) = \{x \mid x \in X,\ f(x) \subset B\}.$$

Zbiory $f^+(A)$ i $f^+(B)$ są niepuste, co wynika z niepustości zbiorów A i B oraz rozłączne i otwarte. Otwartość zbiorów $f^+(A)$ i $f^+(B)$ wynika z otwartości zbiorów A i B i z p.z.g. przekształcenia f. (p. tw. 7). Otrzymaliśmy więc sprzeczność ze spójnością przestrzeni X.

TWIERDZENIE 9. Niech X będzie przestrzenią liniowo-spójną[1] oraz $f\colon X \to 2^Y$ przekształceniem ciągłym o spójnych zbiorach obrazach $f(x)$ i takim że rodzina $\{f(x) \mid x \in X\}$ jest selekcją. Wówczas wykres G_f przekształcenia f jest zbiorem spójnym.

D o w ó d. Wystarczy pokazać, że każda para punktów (x_1,y_1), (x_2,y_2) należących do G_f daje się połączyć zbiorem spójnym zawartym całkowicie w G_f. Z twierdzenia 5 wynika istnienie przekształcenia $\sigma\colon X \to Y$ takiego, że $\tilde{y}_1 = \sigma(x_1) \in f(x_1)$ i $\tilde{y}_2 = \sigma(x_2) \in f(x_2)$. Z liniowej spójności przestrzeni X wynika istnienie ciągłego odwzorowania h przedziału $[0,1]$ w łuk $\widehat{x_1x_2}$, łączący punkty x_1 i x_2, całkowicie zawarty w X. Rozważmy przekształcenie σ zawężone do dziedziny $\widehat{x_1x_2}$ i oznaczmy je przez g, tzn. $g\colon \widehat{x_1x_2} \to Y$, przy czym $g(x) = \sigma(x)$ dla każdego $x \in \widehat{x_1x_2}$. Biorąc $\tilde{h}$ jako złożenie g i h, tj. $\tilde{h} = g \circ h$ otrzymujemy przekształcenie ciągłe przedziału $[0,1]$ w łuk $\widehat{(x_1,\tilde{y}_1),(x_2,\tilde{y}_2)}$ całkowicie należący do G_f. Zbiór będący sumą mnogościową łuku $\widehat{(x_1,\tilde{y}_1),(x_2,\tilde{y}_2)}$ oraz zbioru spójnego $f(x_1)$ łączącego punkt (x_1,y_1) z punktem $(x_1,\tilde{y}_1)$ i zbioru spójnego $f(x_2)$ łączącego punkt (x_2,y_2) z punktem $(x_2,\tilde{y}_2)$ jest zbiorem spójnym łączącym punkt (x_1,y_1) z punktem (x_2,y_2).
Wprowadzimy następującą

DEFINICJE 7. Niech $f\colon X \to 2^Y$ będzie przekształceniem punktowo-zbiorowym. Przekształcenie $g\colon f(X) \to 2^X$, które każdemu elementowi $y \in f(X)$ przyporządkowuje zbiór $g(y) = \{x \mid x \in X,\ y \in f(x)\}$ nazywać będziemy odwrotnym do f i oznaczać symbolicznie $g = f^{-1}$.

TWIERDZENIE 10. Jeżeli $f\colon X \to 2^Y$ jest przekształceniem domkniętym, to f^{-1} jest także przekształceniem domkniętym.

D o w ó d. G_f jest zbiorem domkniętym w $X \times f(X)$ (p. [1]). Ponieważ $G_f = G_{f^{-1}}$, więc $G_{f^{-1}}$ jest domknięty. Dowodzi to domkniętości przekształcenia f^{-1}. Natomiast jeżeli f jest p.z.d. w X, to f^{-1} nie musi być p.z.d. w $f(X)$ o czym świadczy

Przykład 2. Niech $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, +\infty)$ a $f\colon X \to 2^Y$ dane będzie wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{dla } x = 0 \\ \{1, 1/x\} & \text{dla } x \in (0,1] \\ \{1/x\} & \text{dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Podobnie z p.z.g. przekształcenia f nie wynika p.z.g. przekształcenia f^{-1}, co ilustruje

[1] Definicja przestrzeni liniowo-spójnej znajduje się w [2].

Przykład 3. Niech $X = [0, +\infty)$, $y = [0,1]$ a $f: X \to 2^Y$ dane będzie wzorem

$$f(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{dla } x \in [0,1] \\ [0,1] \setminus W & \text{dla } x \in (1, +\infty), \end{cases}$$

gdzie W - zbiór liczb wymiernych.
Również ciągłość przekształcenia f nie implikuje ciągłości przekształcenia f^{-1}; ilustruje to

Przykład 4. Niech $X = [0,1]$, $Y = [0,1]$ a $f: X \to 2^Y$ dane będzie wzorem

$$f(x) = \{x, 1\} \qquad \text{dla } x \in [0,1]$$

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Berge C.: Espaces topologiquef. Paris 1966.
[2] Nikaido H.: Wypukłyje struktury i matiematiczeskaja ekonomika. Moskwa 1972.
[3] Sobieszek W.: On the set-to-point mappings and functions maximum related to them. "Demonstratio Mathematica". (Praca przyjęta do druku).

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ФУНКЦИИ МАКСИМА

Р е з ю м е

В этой работе находятся некоторые обобщения теорем относящихся топологическим свойством функции максима, а тоже доказывается некоторые новые свойства точечно-множественных отображений.
Отображением точечно-множественным называется такое отображение f, которое каждой точке $x \in X$ сопостовляет некоторое подмножество $f(x)$ установленного множества Y Функция максима это функция:

$$M(x) = \sup_{y \in f(x)} \varphi(x,y), \quad x \in X,$$

где φ данная вещественная функция определена на графике G_f точечно-множественного отображения f.

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES OF THE POINT-TO-SET MAPPINGS AND OF THE MAXIMUM FUNCTION

S u m m a r y

In the article some propositions concerning the topological properties of the maximum function, have been generalised and some new properties of the point-to-set mappings have been proved. The term "point-to-set" is given to such a mapping f, which subordinales a sub-set $f(x)$ of the fixed set Y to every point $x \in X$. The term "maximum function" is given to a function

$$M(x) = \sup_{y \in f(x)} \varphi(x,y), \quad x \in X,$$

where φ is the given function of real values, determined on the diagram G_f of the point-to-set mapping f.