ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Stanisław KIEŁTYKA, Wiesław SOBIESZEK

# WARUNKI WYSTARCZAJĄCE DLA PÓŁCIĄGŁOŚCI Z DOŁU PEWNEGO PRZEKSZTAŁCENIA PUNKTOWO-ZBIOROWEGO

I. W pracy rozważa się przekształcenie punktowo-zbiorowe, które każdemu punktowi $x \in P(G)$ przyporządkowuje zbiór

$$f(x) = \{y \mid (x,y) \in G\},$$

gdzie $G$ jest podzbiorem wypukłym i zwartym przestrzeni $R^n$, zaś $P(G)$ jest jego rzutem na ustaloną podprzestrzeń przestrzeni $R^n$.
W metodzie optymalizacji podanej przez J. Wargę w pracy [5] ważną sprawą jest ciągłość pewnych funkcji, którą - jak pokazano w pracy [4] - można zagwarantować sobie przez założenie półciągłości z dołu przekształcenia punktowo-zbiorowego zdefiniowanego wyżej.
W niniejszej pracy omawia się pewne warunki wystarczające dla półciągłości z dołu wyżej wymienionego przekształcenia.

II. Przytoczymy definicje oraz lematy, z których będziemy korzystali niżej[0)]. W tym celu niech $X$ i $Y$ będą ustalonymi podzbiorami przestrzeni euklidesowych skończenie wymiarowych.

DEFINICJA 1. Przekształcenie $f: X \to 2^Y$ będziemy nazywać domkniętym w punkcie $x_o \in X$, jeżeli prawdziwa jest implikacja $(x_n \to x_o,\ y_n \to y_o,\ x_n \in X,\ y_n \to f(x_n)) \in (y_o \in f(x_o))$.

DEFINICJA 2. Przekształcenie $f: X \to 2^Y$ będziemy nazywać półciągłym z góry w punkcie $x_o \in X$, jeżeli dla dowolnego otoczenia $U$ zbioru - obrazu $f(x_o)$ istnieje otoczenie $V$ punktu $x_o$ takie, że $f(V) \subset U$, gdzie $f(V) = \bigcup_{z \in V} f(z)$.

DEFINICJA 3. Przekształcenie $f: X \to 2^Y$ będziemy nazywać półciągłym z dołu w punkcie $x_o \in X$, jeżeli dla dowolnego $y_o \in f(x_o)$, przy warunkach $x_n \to x_o$, $x_n \in X$, istnieje ciąg $\{y_n\}$ taki, że $y_n \in f(x_n)$ i $y_n \to y_o$.

---

0) Dowody przytoczonych tu lematów oraz cytowane definicje znajdują się w [2], [3] i [4].

DEFINICJA 4. Przekształcenie $f: X \to 2^Y$ będziemy nazywać półzwartym z góry w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli z faktu, że $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $y_n \in f(x_n)$ wynika istnienie podciągu ciągu $\{y_n\}$ zbieżnego do pewnego $y_0 \in f(x_0)$.

DEFINICJA 5. Przekształcenie półzwarte z góry i półciągłe z dołu nazywać będziemy ciągłym.

Lemat 1. Jeżeli przekształcenie $f: X \to 2^Y$ jest domknięte i $Y$ jest zwarty, to $f$ jest półzwarte z góry.

Lemat 2. Jeżeli przekształcenie $f: X \to 2^Y$ jest ciągłe i funkcja $g: G_f \to R$ jest ciągła, to funkcje $m(x) = \max\limits_{y \in f(x)} g(x,y)$ i $M(x) = \min\limits_{y \in f(x)} g(x,y)$ są ciągłe.

W pracy [5] rozważa się problem wyznaczania maksimum funkcji g w zbiorze G, gdzie zbiór G jest wypukłym i zwartym w $R^n$ [1], a g jest funkcją rzeczywistą, ciągłą i silnie wklęsłą w zbiorze G. Zagadnienie to realizuje się w sposób następujący. Niech

$$P_i(G) = \{x = (x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n) \mid \bar{x} =$$

$$= (x^1, \dots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \dots, x^n) \in G\}$$

a $f_i$ będzie przekształceniem punktowo-zbiorowym przyporządkowującym każdemu $x \in P_i(G)$ zbiór

$$f_i(x) = \{y = (0, \dots, x^i, \dots, 0) \mid (x,y) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \dots, x^n) \in G\},$$

$$i = 1, \dots, n$$

Zatem $G_{f_i} = G$ dla każdego przekształcenia $f_i$ $(i = 1, \dots, n)$, gdzie $G_{f_i} = \{(x,y) \mid x \in P_i(G) \text{ i } y \in f_i(x)\}$ - wykres przekształcenia $f_i$.
Z lematu 1 i stąd, że przekształcenie $f_i$ jest domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $G_{f_i}$ jest domknięty w $R^{n-1} \times R^1$ wynika, że $f_i$ jest przekształceniem półzwartym z góry.
Problem wyznaczenia maksimum funkcji g w zbiorze G można sprowadzić do problemu n-krotnego wyznaczenia maksimum funkcji jednej zmiennej w oparciu o związek

$$\max_{\bar{x} \in G} g(\bar{x}) = \max_{x \in P_i(G)} \max_{y \in f_i(x)} g(x,y) \quad (i = 1, \dots, n)$$

[1] W całej pracy obowiązują podane tu założenia dotyczące zbioru G.

Efektywność tego rodzaju podejścia jest uzależniona od ciągłości funkcji

$$m_i(x) = \max_{y \in f_i(x)} g(x,y) \quad \text{i} \quad \tilde{f}_i(x) = \{y \mid y \in f_i(x),\ m_i(x) = g(x,y)\}$$

dla $i = 1,\ldots,n$.

W [1] wykazano ciągłość funkcji $\tilde{f}_i(x)$ przy założeniu, że brzeg zbioru G nie posiada odcinków równoległych do osi układu współrzędnych. Okazuje się jednak (p. [4]), że dla ciągłości funkcji $m_i(x)$ i $\tilde{f}_i(x)$ wystarcza półciągłość z dołu przekształcenia $f_i$. Dlatego nasuwa się pytanie, przy jakich założeniach o zbiorze G przekształcenia $f_i$ będą półciągłe z dołu.

W związku z powyższym rozważmy zdania:

(a) Przekształcenia $f_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ są półciągłe z dołu.

(b) Funkcje $a_i(x)$ i $b_i(x)$ $(i = 1,\ldots,n)$ są ciągłe.

(c) Brzeg zbioru G nie posiada odcinków równoległych do osi układu współrzędnych, gdzie $a_i(x) = \min_{y \in f_i(x)} h(y)$ i $b_i(x) = \max_{y \in f_i(x)} h(y)$, przy czym $h(y) = y$.

TWIERDZENIE 1. (a) $\Leftrightarrow$ (b).

D o w ó d. (a) $\Rightarrow$ (b) - wniosek z lematu 2. (b) $\Rightarrow$ (a). Niech $x_0 \in P_i(G)$ $\{x_n\} \subset P_i(G)$, $x_n \to x_0$ i $y_0 \in f_i(x_0)$. Wówczas istnieje $0 \leqslant k_0 \leqslant 1$, że $y_0 = (1-k_0) \cdot a_i(x_0) + k_0 \cdot b_i(x_0)$. Biorąc ciąg $y_n = (1-k_0)a_i(x_n) + k_0 b_i(x_n) \in f_i(x_n)$ i przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ z ciągłości $a_i(x)$ i $b_i(x)$ mamy $y_n \to y_0$.

TWIERDZENIE 2. (c) $\Rightarrow$ (a).

D o w ó d. $1^0$ Niech $x_0$ będzie punktem brzegowym zbioru $P_i(G)$. Z założenia wynika, że $f_i(x_0)$ jest jednoelementowym zbiorem-obrazem. Ponieważ $f_i$ jest przekształceniem półzwartym z góry w punkcie $x_0$, więc dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \subset P_i(G)$, $x_n \to x_0$ i $y_n \in f_i(x_n)$ wynika istnienie podciągu ciągu $\{y_n\}$ zbieżnego do pewnego $y_0 \in f_i(x_0)$. Nie zmniejszając ogólności możemy przyjąć, że $y_n \to y_0$, gdzie $\{y_0\} = f_i(x_0)$. A więc dla każdego $\{x_n\} \subset P_i(G)$, $x_n \to x_0$ można wskazać ciąg $\{y_n\}$, $y_n \in f_i(x_n)$ taki, że $y_n \to y_0 \in f_i(x_0)$. Dowodzi to półciągłości z dołu przekształcenia $f_i$ w punkcie $x_0$.

$2^0$ Niech teraz $x_0 \in \operatorname{int} P_i(G) \neq \emptyset$.

(Jeżeli $\operatorname{int} P_i(G) = \emptyset$, to $f_i$ jest funkcją ciągłą).

Wtedy istnieje kula domknięta o promieniu $r$ i o środku w punkcie $x_0$, $K(x_0,r) \subset P_i(G)$. Ponieważ $x_n \to x_0$, więc istnieje $N_0$ takie, że dla $n > N_0$ $\{x_n\} \subset K(x_0,r)$. Niech $\{\overline{x}_n\} \subset K(x_0,r)$ będzie takim ciągiem, że $\rho(\overline{x}_n,x_0) = r$ oraz $x_n = (1-t_n) \cdot x_0 + t_n \cdot \overline{x}_n$, gdzie $\rho$ - metryka w $R^n$, a $0 \leqslant t_n \leqslant 1$. Roz-

ważmy ciąg $y_n = (1-t_n)\cdot y_o + t_n\cdot \overline{y}_n$, gdzie $\{\overline{y}_n\}$ jest dowolnym ciągiem spełniającym warunek $\overline{y}_n \in f_i(\overline{x}_n)$. Na mocy wypukłości zbioru G $y_n \in f_i(x_n)$. Oczywiście $x_n \to x_o$ przy $t_n \to 0$, a to oznacza, że $y_n \to y_o$.
Jednakże implikacja w drugą stronę nie zachodzi, to znaczy (a) $\not\Rightarrow$ (c), o czym świadczy następujący

Przykład 1. Niech $G = \{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 1$ i $x_1^2 + (x_2-1)^2 \leqslant 1$ i $1 \leqslant x_3 \leqslant 2\}$ $P_3(G) = \{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 1$ i $x_1^2 + (x_2-1)^2 \leqslant 1$ i $x_3 = 0\}$ $f_3(x) = \{x_3 \mid (x_1,x_2,0) \in P_3(G)$ i $(x_1,x_2,x_3) \in G\}$.
Zauważmy, że brzeg zbioru G posiada odcinki równoległe do osi $x_3$, a mimo to przekształcenie $f_3$ jest półciągłe z dołu na $P_3(G)$.
Zatem warunek (c) dotyczący zbioru G nie jest konieczny dla zapewnienia półciągłości z dołu odpowiednich przekształceń $f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Powstaje pytanie, jakie zbiory G nie spełniające warunku (c) gwarantują półciągłość z dołu odpowiednich przekształceń $f_i$.

TWIERDZENIE 3. Niech $x_o$ będzie punktem brzegowym zbioru $P_i(G)$ oraz $\{x_o\} \times f_i(x_o)$ będzie odcinkiem nie zredukowanym do punktu. Wtedy warunkiem koniecznym na to, aby przekształcenie $f_i$ było półciągłe z dołu w $x_o$ jest, aby dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset P_i(G)$, $x_n \to x_o$ istniało $N_o$ takie, że dla każdego $n > N_o$ zbiory $\{x_n\} \times f_i(x_n)$ były odcinkami nie zredukowanymi do punktu.

D o w ó d. Niech $x_o$ będzie punktem brzegowym zbioru $P_i(G)$, $\{x_o\} \times f_i(x_o)$ – odcinkiem, $f_i$ – przekształceniem półciągłym z dołu oraz niech istnieje ciąg $\{\overline{x}_n\} \subset P_i(G)$, $\overline{x}_n \to x_o$ taki, że istnieje $N_o$, że dla $n > N_o$ $\{\overline{x}_n\} \times f_i(\overline{x}_n)$ są odcinkami zredukowanymi do punktów (innej możliwości nie ma – to znaczy $\{\overline{x}_n\} \times f_i(\overline{x}_n)$ mogą być jedynie punktami bądź odcinkami – na mocy wypukłości zbioru G). Ponieważ $G = G_{f_i}$ jest zbiorem zwartym w $X \times Y$, więc $\{\overline{x}_n\} \times f_i(\overline{x}_n) \to (x_o,\overline{y}) \in G$, $\overline{y} \in f_i(x_o^i)$. Niech $y_o \neq \overline{y}$ i $y_o \in f_i(x_o)$. Wtedy dla $y_o$ i dla ustalonego ciągu $x_n \to x_o$ nie można wskazać ciągu $\{y_n\}$ takiego, by $y_n \in f_i(x_n)$ i $y_n \to y_o$, co przeczy założeniu półciągłości z dołu przekształcenia $f_i$ w punkcie $x_o$.
O tym, że jest to tylko warunek konieczny świadczy następujący

Przykład 2. Niech $G = G_1 \cup G_2$, gdzie

$$G_1 = \{x = (x_1,x_2,x_3) \mid 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1(x_3-4) \leqslant 0 \text{ i } 1 \leqslant x_3 \leqslant 4\}$$

$$G_2 = \{x = (x_1,x_2,x_3) \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 1 \text{ i } 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\},$$

tj. $G_1$ jest częścią stożka o wierzchołku w punkcie (0,0,4) i kierownicy $(x_1-1)^2 + x_2^2 = 1$, $x_3 = 1$, a $G_2$ częścią walca o kierownicy $(x_1-1)^2 + x_2^2 = 1$ $x_3 = 0$.
Przekształcenie $f_3$ nie jest półciągłe z dołu w punkcie $x = (0,0,0)$.

Zatem, nie wszystkie zbiory spełniające wyżej podany warunek konieczny zapewniają półciągłość z dołu odpowiednich przekształceń $f_i$. W związku z tym użyteczne jest

TWIERDZENIE 4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniało takie "i", że w każdym punkcie brzegowym $x_o \in P_i(G)$ $f_i$ nie będzie półciągłe z dołu, jest, aby

$$\underline{\lim}_{x \to x_o} b_i(x) < b_i(x_o) \quad \text{lub} \quad \overline{\lim}_{x \to x_o} a_i(x) > a_i(x_o).$$

D o w ó d. Warunek konieczny

Z wypukłości i zwartości zbioru G wynika, że $\overline{\lim}_{x \to x_o} b_i(x) = b_i(x_o)$ oraz $\underline{\lim}_{x \to x_o} a_i(x) = a_i(x_o)$. Ponieważ $f_i$ nie jest przekształceniem półciągłym z dołu w punkcie $x_o$, więc na podstawie twierdzenia 1 nie jest ciągła w tym punkcie funkcja $b_i(x)$ lub $a_i(x)$.

Z wklęsłości funkcji $b_i(x)$ wynika, że $\overline{\lim}_{x \to x_o} b_i(x) = b_i(x_o)$, zaś z wypukłości funkcji $a_i(x)$ wynika, że $\underline{\lim}_{x \to x_o} a_i(x) = a_i(x_o)$, więc otrzymamy ostatecznie alternatywę

$$\overline{\lim}_{x \to x_o} b_i(x) = b_i(x_o) > \underline{\lim}_{x \to x_o} b_i(x) \quad \text{lub} \quad \underline{\lim}_{x \to x_o} a_i(x) = a_i(x_o) < \overline{\lim}_{x \to x_o} a_i(x)$$

Warunek wystarczający

Niech

$$\overline{\lim}_{x \to x_o} b_i(x) = b_i(x_o) > \underline{\lim}_{x \to x_o} b_i(x) \quad \text{lub} \quad \underline{\lim}_{x \to x_o} a_i(x) = a_i(x_o) < \overline{\lim}_{x \to x_o} a_i(x)$$

Oznacza to, że $a_i(x)$ lub $b_i(x)$ nie jest ciągła w punkcie $x_o$. W oparciu o twierdzenie 1 możemy stwierdzić, że w punkcie $x_o$ nie jest półciągłe z dołu przekształcenie $f_i$.

Wpłynęło do Redakcji w styczniu 1975 r.

## LITERATURA


[1] Каплан А.: Некоторые свойства оператора покоординотного спуска. Оптимальное планирование, 7, стр. 25-30 1967.

[2] Karlin S.: Mathematical methods and theory in games, programming and economics. London-Paris 1959.

[3] Nikaido H.: Convex structures and economic theory. New York and London 1968.

[4] Sobieszek W.: On the point-to-set mappings and functions maximum related to them. Demonstratio Mathematica, 4, p. 483-494, 1974.

[5] Warga J.: Minimizing certain convex function. J. Soc. Indust. Appl. Math., 3, p. 588-593, 1963.


## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ СНИЗУ ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ


Р е з ю м е

В работе рассмотрено точечно-множественно отображение, которое каждой точке $X \in P(G)$ сопоставляет множество

$$f(x) = \left\{ y \,\middle|\, (x,y) \in G \right\}$$

где $G$ является выпуклым и компактным подмножеством пространства $R^n$ а $P(G)$ его проекцией на определенное подпространство пространства $R^n$. В методе оптимализации поданным И. Варгой в работе [5] важным является то, что касается непрерывности некоторых функций, которую, как представлено в работе [4] можно обеспечить себе исходя из полунепрерывности снизу точечно-множественного отображения, определенного выше. В настоящей работе обсуждены некоторые достаточные условия для полунепрерывности снизу вышеупомянутого отображения.


## THE SUFFICIENT CONDITIONS OF LOWER SEMI-CONTINUITY OF SOME POINT-TO-SET MAPPING


S u m m a r y

In this paper is considered a point-to-set mapping which for each of points $x$ $P(G)$ assigns a set

$$f(x) = \left\{ y \,\middle|\, (x,y) \in G \right\},$$

where $G$ is convex and compact subset of $R^n$, space, and $P(G)$ is his projection on the fixed subspace of a space $R^n$. In the method of optimi-

zation given by J. Warga in a paper [5] very important is a continuity of some function which, as it is shown in the paper [4], we can guarantee ourselves by assumption of lower semi-continuity of the point-to-set mapping defined above. In this paper some sufficient conditions of lower semi-continuity of a mapping mentioned above are discussed.