Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Bolesław SZAFNICKI

PEWIEN DOWÓD TWIERDZENIA WICHMANNA

W artykule E.H. Wichmanna pt. "Density Matrices Arising from Incomplete Measurements", zamieszczonym w Journal of Mathematical Physics (vol. 4, number 7, july 1963), podany został dowód twierdzenia mającego fundamentalne znaczenie dla termodynamiki informacyjnej stanów mieszanych. W tej pracy twierdzenie to udowodnione zostanie w sposób odmienny i wydaje się prostszy.

Przejmując oznaczenia i definicje z artykułu E.H. Wichmanna rozważania nasze prowadzimy w rzeczywistej przestrzeni wektorowej V_h złożonej ze wszystkich macierzy Hermite'a stopnia N, gdzie N jest dowolną ustaloną liczbą naturalną. W przestrzeni tej, której wymiar, jak łatwo wykazać, wynosi N^2, definiuje się iloczyn skalarny przez przyjęcia, dla dowolnych $X,Y \in V_h$:

$$(X,Y) = Tr(XY),$$

przez $Tr(A)$ oznaczając ślad macierzy A.
Przez V_d oznaczymy zbiór wszystkich macierzy gęstości stopnia N, a więc zbiór wszystkich elementów przestrzeni V_h, które są nieujemnie określone i mają ślad równy jedności.

Niech $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ oznacza dowolny, taki zbiór elementów przestrzeni V_h, że macierze $X_1, X_2, \ldots, X_p, I$ są liniowo niezależne, gdzie przez I oznaczono macierz jednostkową przestrzeni V_h.

Każdej macierzy $q \in V_d$ można przyporządkować wektor $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_p\} \in R^p$ przyjmując:

$$x_k = Tr(X_k q); \quad k = 1,2,\ldots,p,$$

albo zapisując to inaczej,

$$x = Tr(Xq). \tag{1}$$

Przez $S(X)$ oznaczymy obraz zbioru V_d przez przekształcenie (1).

DEFINICJA. Dla danych wektorów $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\} \in R^p$ i $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \in \operatorname{Int} S(X)$ definiujemy macierz Hermite'a

$$A(z) = z_1X_1 + z_2X_2 + \ldots + z_pX_p - (z_1x_1 + z_2x_2 + \ldots + z_px_p)I \quad (2)$$

Lemat 1. Dla każdego wektora jednostkowego $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ macierz $A(u)$ ma co najmniej jedną wartość własną dodatnią.

D o w ó d. Jeżeli przez $\nu_M(u)$ oznaczyć największą wartość własną macierzy $u_1X_1 + u_2X_2 + \ldots + u_pX_p$, a przez $\varphi^M(u)$ odpowiadający jej wektor własny, to łatwo zauważyć, że $\varphi^M(u)$ jest wektorem własnym macierzy $A(u)$. Ponieważ $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ jest punktem wewnętrznym zbioru $S(X)$, więc jak łatwo udowodnić (lub patrz np. [1], str. 887).

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_px_p < \nu_M(u),$$

stąd zaś dla odpowiadającej wektorowi $\varphi^M(u)$ wartości własnej $\lambda_M(u)$ macierzy $A(u)$ otrzymujemy:

$$\lambda_M(u) = (A(u)\varphi_M, \varphi_M) =$$

$$= ([u_1X_1 + u_2X_2 + \ldots + u_pX_p - (u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_px_p)I]\varphi_M, \varphi_M) > 0.$$

c.b.d.o.

Lemat 2. Jeśli dla dowolnych macierzy $B_1, B_2, \ldots, B_p \in V_h$ utworzyć macierz $B(u) = u_1B_1 + u_2B_2 + \ldots + u_pB_p$, gdzie $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ jest wektorem jednostkowym, a przez $\mu_M(u)$ oznaczyć największą z wartości własnych macierzy $B(u)$, to $\mu_M(u)$ jest funkcją ciągłą od u.

D o w ó d. Gdyby funkcja $B(u)$ była nieciągła w punkcie $u^o = \{u_1^o, u_2^o, \ldots, u_p^o\}$, to istniałby taki ciąg wektorów $\{u^n\} \to u^o$, że

$$\mu_M(u^n) \to \mu_M \neq \mu_M(u^o).$$

Niech wartości własnej $\mu_M(u^n)$ odpowiada jednostkowy wektor własny

$$\psi_n \quad (B(u^n)\psi_n, \psi_n) = \mu_M(u^n), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Wiadomo, że

$$\mu_M(u^n) = \max_{\|\psi\|=1} (B(u^n)\psi, \psi) = (B(u^n)\psi_n, \psi_n) \qquad n = 0,1,2,\ldots \quad (3)$$

Omówimy oddzielnie dwa przypadki:

I. $\mu_M > \mu_M(u^o)$. Nic nie tracąc z ogólności można przyjąć, że ciąg $\{\psi_n\}$ jest zbieżny do $\bar{\psi}$. Otrzymujemy stąd

$$\mu_M(u^n) = (B(u^n)\psi_n,\psi_n) = u_1^n(B_1\psi_n,\psi_n) + u_2^n(B_2\psi_n,\psi_n) + \ldots + u_p^n(B_p\psi_n,\psi_n) \to$$

$$\to u_1^o(B_1\bar{\psi},\bar{\psi}) + u_2^o(B_2\bar{\psi},\bar{\psi}) + \ldots + u_p^o(B_p\bar{\psi},\bar{\psi}) = (B(u^o)\bar{\psi},\bar{\psi}),$$

a zatem $\mu_M = (B(u^o)\bar{\psi},\bar{\psi}) > (B(u^o)\psi_o,\psi_o)$, co jest sprzeczne z (3).

II. $\mu_M < \mu_M(u^o)$. Oznaczmy $\mu_M(u^o) - \mu_M = \alpha$, wówczas istnieje takie N_1, że dla $n > N_1$

$$\mu_M(u^n) < \mu_M(u^o) - \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Z drugiej strony ponieważ $u^n \to u^o$, więc istnieje takie N_2, że dla $n > N_2$

$$\left|(B(u^n)\psi_o,\psi_o) - (B(u^o)\psi_o,\psi_o)\right| = \left|(B(u^n)\psi_o,\psi_o) - \mu_M(u^o)\right| < \frac{\alpha}{2},$$

stąd i na podstawie (4) otrzymujemy dla $n > \max(N_1,N_2)$ nierówność:

$$(B(u^n)\psi_o,\psi_o) > \mu_M(u^n),$$

która jest sprzeczna z (3), co kończy dowód lematu.

Jeżeli przez $\Lambda(u)$ oznaczyć największą wartość własną macierzy $\Lambda(u)$, to przyjmując $X_j - x_j I = B_j$ $(j = 1,2,\ldots,p)$ otrzymujemy $\mu_M(u) = \Lambda(u)$, a więc funkcja $\Lambda(u)$ jest ciągła.

Ponieważ sfera jednostkowa $\|u\| = 1$ jest zbiorem zwartym, więc istnieje taki wektor jednostkowy u_o, że $\min\limits_{\|u\|=1}\Lambda(u) = \Lambda(u_o)$, stąd na podstawie lematu 1 otrzymujemy

Wniosek

$$\min_{\|u\|=1} \Lambda(u) = \beta > 0.$$

TWIERDZENIE (E.H. Wichmann). Dla każdego wektora $x = \{x_1,x_2,\ldots,x_p\} \in$ Int $S(X)$ układ równań ze względu na $y = \{y_1,y_2,\ldots,y_p\}$:

$$\frac{1}{\mathrm{Tr}(\exp\sum\limits_{i=1}^{p} y_iX_i)} \mathrm{Tr}(X_j \exp\sum_{i=1}^{p} y_iX_i) = x_j \qquad j = 1,2,\ldots,p \tag{5}$$

posiada rozwiązanie.

D o w ó d. Weźmy pod uwagę funkcję pomocniczą $F(y) = \log \operatorname{Tr}(\exp A(y))$. Dla funkcji tej otrzymujemy na podstawie wniosku:

$$F(y) = \log \operatorname{Tr}(\exp \|y\| A(\frac{y}{\|y\|})) > \beta \|y\|,$$

gdzie $\beta > 0$.
Widać stąd, że dla y spełniających nierówność $\|y\| > (1 + \log N)/\beta$ ma miejsce nierówność $F(y) > 1 + \log N$. Ponieważ $F(0) = \log N$, więc w kuli $\|y\| \leqslant (1 + \log N)/\beta$ musi istnieć taki punkt, w którym funkcja $F(y)$ osiąga minimum, a więc w którym $\frac{\partial F}{\partial y_j} = 0$ dla $j = 1,2,\ldots,p$. W punkcie tym mamy zatem

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{1}{\operatorname{Tr}(\exp\left[\sum\limits_{i=1}^{p} y_i X_i - (\sum\limits_{i=1}^{p} y_i x_i) I\right])} \operatorname{Tr}\left[(X_j - x_j I)\exp\left[\sum_{i=1}^{p} y_i X_i - (\sum_{i=1}^{p} y_i x_i) I\right]\right] = 0$$

$$j = 1,2,\ldots,p,$$

czyli

$$\frac{1}{\operatorname{Tr}(\exp\left[\sum\limits_{i=1}^{p} y_i X_i - (\sum\limits_{i=1}^{p} y_i x_i) I\right])} \operatorname{Tr}\left[X_j \exp\left[\sum_{i=1}^{p} y_i X_i - (\sum_{i=1}^{p} y_i x_i) I\right]\right] = x_j$$

$$j = 1,2,\ldots,p,$$

a stąd po uwzględnieniu równości $\exp(\alpha I) = (\exp\alpha) I$ - która ma miejsce dla dowolnej stałej α, otrzymujemy równość (5).

LITERATURA

[1] Wichmann E.H.: Density Martices Arising from Incomplete Measurements. J. Math. Phys. 4, 884-896, 1963.

Wpłynęło do Redakcji w lipcu 1974 r.

ОБ ОДНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ВИХМАНА

Р е з ю м е

Е.Х. Вихман доказал в своей статьи [1] фундаментальному теорему информационной термодинамики смешанных положений. В этой работе представлено новое более прямое доказательство этого теорема.

SOME PROOF OF A WICHMANN'S THEOREM

S u m m a r y

E.H. Wichmann has proved, in his paper [1], a fundamental theorem for the informational thermodynamics of the mixed states. In this paper a new simpler proof of that theorem is given.