ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975
Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Olga BERESNIEWICZ-RAJCA

O WSPÓŁCZYNNIKACH FUNKCJI GWIAZDZISTYCH SYMETRYCZNYCH

Streszczenie. Korzystając z własności współczynników funkcji holomorficznej o części rzeczywistej nieujemnej, podano dokładne oszacowanie z dołu współczynnika a_3 funkcji gwiaździstej o współczynnikach rzeczywistych

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots,$$

oraz przedział, w którym mieści się $\inf\{a_5\}$.

Oznaczmy przez S_G klasę funkcji jednolistnych w kole K (0,1) postaci

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots, \tag{1}$$

odwzorowujących K (0,1) na obszar D_f gwiaździsty względem początku układu. Funkcje klasy S_G nazywają się funkcjami gwiaździstymi. Wiadomo, że funkcja jednolistna postaci (1) jest gwiaździsta wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{Re}\left\{z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad |z| < 1$$

Funkcja

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \tag{2}$$

jest znaną funkcją Carathéodory'ego. Jest to funkcja holomorficzna i posiadająca część rzeczywistą nieujemną w kole K (0, 1), o rozwinięciu

$$p(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots \tag{3}$$

Wiadomo, że

$$|\alpha_n| \leqslant 2 \quad n = 1,2,\dots \tag{4}$$

i że oszacowanie to jest dokładne. Funkcją ekstremalną jest np. funkcja

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \dots$$

Wyznaczając $f(z)$ z (2) otrzymamy:

$$f(z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{p(t)-1}{t}\,dt\right\} \tag{5}$$

Związek ten łącznie z oszacowaniem (4) posłużył do udowodnienia hipotezy Bieberbacha dla funkcji klasy S_G, a mianowicie, że

$$|a_n| \leqslant n \quad n = 2,3, \dots \tag{6}$$

Funkcją ekstremalną dla nierówności (6) jest funkcja Koebego

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots nz^n + \dots \tag{7}$$

Oznaczmy teraz przez $\hat{S}_G^{(k)}$ podrodzinę rodziny S_G funkcji gwiaździstych o pierwszych k współczynnikach: 1, a_2, a_3, ... a_k, rzeczywistych. Niech $\hat{S}_G$ oznacza podrodzinę rodziny S_G funkcji gwiaździstych o wszystkich współczynnikach rzeczywistych. Funkcje tej rodziny będziemy w dalszym ciągu nazywać funkcjami gwiaździstymi symetrycznymi.

Na mocy (6) i (7) mamy oczywiście dla rodzin $\hat{S}_G^{(k)}$ i $\hat{S}_G$

$$\sup\{a_n\} = n, \quad n = 2,3, \dots$$

Wiadomo dalej, że

$$\inf\{a_n\} \geqslant -n$$

i że dla n parzystych

$$\inf\{a_n\} = -n,$$

bo istnieje funkcja klasy $\hat{S}_G$, dla której $a_n = -n$ dla n parzystych, a mianowicie

$$K(z) = \frac{z}{(1+z)^2} = z - 2z^2 + 3z^3 - 4z^4 + \dots$$

Inaczej ma się rzecz w przypadku n nieparzystych. Okazuje się bowiem, że

$$\inf_{f \in \hat{S}_G^{(3)}} \{a_3\} = -1 \tag{8}$$

Wprowadźmy teraz odpowiednie oznaczenia, analogicznie do oznaczeń $\hat{S}_G^{(k)}$ i $\hat{S}_G$.
I tak: rodzinę wszystkich funkcji Caratheodory'ego o k pierwszych współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ rzeczywistych oznaczmy przez S_C, rodzinę wszystkich funkcji Caratheodory'ego o współczynnikach rzeczywistych przez S_C.
Jest oczywiste, że

$$\hat{S}_G^{(2)} \supset \hat{S}_G^{(3)} \supset \ldots \supset \hat{S}_G$$

oraz

$$\hat{S}_C^{(1)} \supset \hat{S}_C^{(2)} \supset \ldots \supset \hat{S}_C$$

Wynik (8) uzyskujemy, korzystając z następującego twierdzenia Caratheodory'ego [1].

Niech

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{9}$$

będzie układem n dowolnych liczb zespolonych. Na to, by istniała funkcja postaci (3) holomorficzna w kole $|z| < 1$ o części rzeczywistej nieujemnej i o pierwszych n współczynnikach danych układem (9), potrzeba i wystarcza, by punkt (9) należał do wypukłego n-wymiarowego obszaru domkniętegol $\overline{U}_n$, którego wnętrze określone jest przez nierówności

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ \alpha_1 & 2 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{\alpha}_k & \overline{\alpha}_{k-1} & \ldots & \ldots & 2 \end{vmatrix} > 0 \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{10}$$

Zauważmy, że jeżeli $f(z) \in \hat{S}_G^{(k)}$, to p(z) określona wzorem (2) należy do $\hat{S}_C^{(k)}$ i odwrotnie, jeżeli $p(z) \in \hat{S}_C^{(k)}$, to f(z) określona wzorem (5) należy do $\hat{S}_G^{(k)}$. Podobnie, jeżeli $f(z) \in \hat{S}_G$, to $p(z) \in \hat{S}_C$ i odwrotnie.

Z (5) otrzymamy następujące związki:

$$a_2 = \alpha_1, \quad a_3 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1^2) \tag{11}$$

Zajmijmy się teraz oszacowaniem z dołu współczynnika a_3 w klasie $\hat{S}_G^{(3)}$. Na mocy związków (11) i przytoczonego twierdzenia Caratheodory'ego zadanie sprowadza się do znalezienia minimum funkcji

$$a_3 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1^2) \tag{12}$$

dwóch zmiennych α_1, α_2 w obszarze domkniętym $\bar{U}_2$, którego wnętrze określone jest nierównościami

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 2 \end{vmatrix} > 0 \tag{13}$$

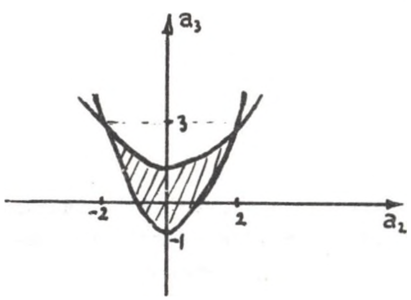
Wiadomo również, że obszar $\bar{U}_2$ zawarty jest w kostce: $-2 \leqslant \alpha_i \leqslant 2$, $i=1,2,\ldots$ Przekształcając nierówności (13) otrzymamy

$$4 - \alpha_1^2 > 0 \quad \text{i} \quad 2\alpha_2^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1^2 - 8 < 0,$$

czyli

$$\begin{gathered} -2 < \alpha_1 < 2 \\ -2 + \alpha_1^2 < \alpha_2 < 2 \end{gathered} \tag{14}$$

Stąd i z (11) oraz z uwagi na to, że $\alpha_1 = a_2$ obszar zmienności współczynników (a_2, a_3) funkcji klasy $\hat{S}_G^{(3)}$ określony jest nierównościami



Rys. 1

$$-2 \leqslant a_2 \leqslant 2,$$

$$a_2^2 - 1 \leqslant a_3 \leqslant \frac{1}{2}a_2^2 + 1,$$

a więc położony jest między łukami parabol

$$a_3 = a_2^2 - 1, \quad a_3 = \frac{1}{2}a_2^2 + 1$$

Wynika stąd między innymi, że

$$\inf_{\hat{S}_G^{(3)}} \{a_3\} = -1 \tag{15}$$

Funkcją realizującą ekstremum (15) jest funkcja

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2} = z - z^3 + z^5 - \dots \tag{16}$$

Funkcja ta odwzorowuje koło $|z| < 1$ na obszar, który powstaje przez usunięcie z płaszczyzny dwóch półprostych $\left[-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ i $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$. Funkcja (16) należy do klasy $\hat{S}_G$, a więc mamy również

$$\inf_{\hat{S}_G} \{a_3\} = -1$$

Zajmijmy się z kolei oszacowaniem z dołu współczynnika a_5 funkcji klasy $\hat{S}_G^{(5)}$. Niestety ze względu na bardzo uciążliwe rachunki trudno jest otrzymać dokładne $\inf\{a_5\}$, można jednak wyznaczyć przedział, w którym zawiera się kres dolny tego współczynnika.

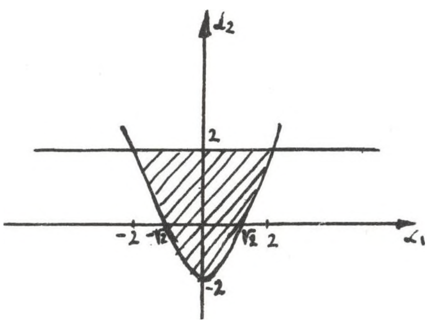
Korzystając z (5) otrzymamy

$$a_5 = \frac{1}{24}\,(6\alpha_4 + 3\alpha_2^2 + 8\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^4), \tag{17}$$

lub kładąc $y = 24a_5$,

$$y = 6\alpha_4 + 3\alpha_2^2 + 8\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^4 \tag{18}$$

W celu oszacowania $\inf\{a_5\}$ z góry znajdźmy współrzędne jednego z punktów obszaru $\overline{U}_5$. Oznaczmy ten punkt przez $P_0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \alpha_4^0)$. Rozwiązując układ nierówności (14) otrzymamy obszar zawarty między prostą $\alpha_1 = 2$ i parabolą $\alpha_2 = \alpha_1^2 - 2$ - rys. 2.



Rys. 2

Dla uproszczenia dalszych rachunków wybierzmy z tego obszaru punkt (1, 0), czyli

$$\alpha_1^0 = 1 \quad \alpha_2^0 = 0 \tag{19}$$

Biorąc pod uwagę trzecią z nierówności (10) oraz (19), otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \alpha_3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\alpha_3^2 - 2\alpha_3 + 5 \geqslant 0,$$

stąd

$$-\frac{5}{3} \leqslant \alpha_3 \leqslant 1$$

Przyjmijmy $\alpha_3^o = -1$ i oszacujmy α_4 korzystając z czwartej nierówności (10) po wstawieniu do niej $\alpha_1^o = 1$, $\alpha_2^o = 0$, $\alpha_3^o = -1$, otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \alpha_4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \alpha_4 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(-\alpha_4^2 - 2\alpha_4) \geqslant 0,$$

skąd

$$-2 \leqslant \alpha_4 \leqslant 0.$$

Możemy przyjąć $\alpha_4^o = -2$.
Wstawiając otrzymane powyżej współrzędne punktu P_o do (17), otrzymamy

$$a_5 = -\frac{19}{24},$$

stąd

$$\inf\{a_5\} - \frac{19}{24} \approx -0,79$$

Zajmijmy się teraz oszacowaniem od dołu $\inf\{a_5\}$.
W tym celu policzmy minimum wielomianu (18) w pasie P

$$P: \begin{cases} -2 \leqslant \alpha_i \leqslant 2 & \\ -\infty < \alpha_2 < +\infty, & i=2,3,4 \end{cases}$$

w którym zawarty jest obszar U_5. Przypuśćmy, że to minimum y^* przyjęte jest w punkcie $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*) \in P$, a więc

$$3\alpha_2^{*2} + 6\,\alpha_1^{*2}\alpha_2^* + (6\alpha_4^* + 8\alpha_1^*\alpha_3^* + \alpha_1^{*4} - y^*) = 0 \tag{20}$$

Z (20) widać, że równanie kwadratowe

$$3x^2 + 6\alpha_1^{*2}x + (6\alpha_4^* + 8\alpha_1^*\alpha_3^* + \alpha_1^{*4} - y^*) = 0$$

o współczynnikach rzeczywistych i o rzeczywistym pierwiastku α_2^* musi mieć nieujemny wyróżnik, a więc że

$$2\alpha_1^{*4} - (6\alpha_4^* + 8\alpha_1^*\alpha_3^* - y^*) \geqslant 0,$$

czyli

$$y^* - (6\alpha_4^* + 8\alpha_1^*\alpha_3^* - 2\alpha_1^4) \geqslant 0.$$

Łatwo widać, że ze względu na to, iż y^* jest wartością minimalną, musi być

$$6\alpha_4^* + 8\alpha_1^*\alpha_3^* - 2\alpha_1^{*4} = \min_{\substack{|\alpha_i| \leqslant 2\\ i=1,3,4}} (6\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_1^4),$$

a to ostatnie minimum przyjęte jest, jak łatwo widać w punktach

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_3 = -2, \quad \alpha_4 = -2$$

lub

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -2.$$

W obu przypadkach z (18) otrzymamy

$$y^* \geqslant -76,$$

stąd

$$\inf\{a_5\} \geqslant -\frac{76}{24} \cong -3{,}2$$

Ostatecznie więc

$$-3{,}2 < \inf\{a_5\} < -0{,}79.$$

Wpłynęło do redakcji w styczniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Caratheodory C.: Theory of functions. Vol. 2 New York 1954.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ СИМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

Пользуясь свойствами коэффициентов голоморфной функции, которой действительная часть неотрицательная, найдено нижнюю границу коэффициента a_3 звездообразной функции с действительными коэффициентами

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

и интервал, в котором содержится $\inf\{a_5\}$.

ABOUT THE COEFFICIENTS OF SYMMETRICAL STARLIKE FUNCTIONS

S u m m a r y

Making use of the properties of the coefficients of a holomorphic function with a real non-negative part, the paper provides an exact estimation from below of the coefficient a_3 of a starlike function with the real coefficients

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

Also the range, in which $\inf\{a_5\}$ is comprised, has been given.