ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Krystyna MIŚTA

OSZACOWANIE DRUGIEJ I TRZECIEJ POCHODNEJ W RODZINIE FUNKCJI ŚREDNIO p-LISTNYCH

Streszczenie. W pracy rozważa się klasę funkcji średnio p-listnych w sensie Biernackiego w kole jednostkowym K, tzn. takich funkcji, dla których $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})d\varphi \leqslant p$ dla każdego $R > 0$, gdzie $n(\omega) = n(\omega, k, f)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $f(z) = \omega$ w K. W pracy wykazano, że dla funkcji tej klasy prawdziwe są następujące ostre oszacowania drugiej i trzeciej pochodnej:

$$|f''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-2}}{(1-r)^{2p+2}}\left[(p+1)r^2 + 2(p+1)r + p-1\right] \quad \text{dla} \quad |z| = r,$$

$$|f'''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-3}}{(1-r)^{2p+3}}\left[(p^2+3p+2)r^3 + 3(p^2+3p+2)r^2 + 3(p^2+p-2)r+p^2-3p+2\right]$$

$$\text{dla} \quad |z| = r.$$

Funkcją ekstremalną jest funkcja $f^*(z) = \frac{z^p}{(1-e^{it}z)^{2p}}$ w punkcie $z = re^{-it}$.

Weźmy pod uwagę funkcję holomorficzną postaci $f(z) = z^p+a_{p+1}z^{p+1} + \ldots$ w obszarze Δ. Niech $n(\omega) = n(\omega, \Delta, f)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $f(z) = \omega$ w Δ.

DEFINICJA. Funkcję $f(z)$ nazywamy funkcją średnio p-listną w obszarze Δ w sensie Biernackiego, jeżeli $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})d\varphi \leqslant p$ dla każdego $R > 0$.

Ograniczymy się do funkcji średnio p-listnych określonych w kole K. Dla tych ostatnich w przypadku $p = 1$ znane są ostre oszacowania drugiego i trzeciego współczynnika [3], [2] oraz modułu funkcji i modułu jej pierwszej pochodnej ([3] str. 121), i tak, jeśli $\varphi(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ jest funkcją średnio jednolistną, to

$$|a_2| \leqslant 2, \qquad (1)$$
$$|a_3| \leqslant 3$$

oraz

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2},$$
$$|\varphi'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \tag{2}$$

gdzie $|z| = r$.

Niech z, $z \neq 0$, będzie dowolnym stałym punktem z koła $|z| < 1$. Funkcja $g(\zeta) = \frac{z+\zeta}{1+\bar{z}\cdot\zeta}$ odwzorowuje konforemnie koło $|\zeta|<1$ na siebie, jest funkcją jednolistną i ponadto

$$g'(\zeta) = \frac{1 - |z|^2}{(1 + \bar{z}\cdot\zeta)^2}. \tag{3}$$

Niech dalej φ będzie dowolną funkcją średnio jednolistną. Rozpatrzmy funkcję

$$h(\zeta) = \frac{\varphi[g(\zeta)] - \varphi(z)}{\varphi'(z)(1 - |z|^2)}. \tag{4}$$

Jest ona oczywiście holomorficzna i średnio jednolistna w kole $|\zeta|<1$ oraz $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$.

Korzystając ze znanych oszacowań $|h''(0)| \leqslant 2.2!$, $|h'''(0)| \leqslant 3.3!$ oraz ze wzoru (2) jak również z prac [1], [4] otrzymamy ostre oszacowania drugiej i trzeciej pochodnej funkcji średnio jednolistnej

$$|\varphi''(z)| \leqslant \frac{2(2 + r)}{(1 - r)^4} \quad \text{dla} \quad |z| = r, \tag{5a}$$

$$|\varphi'''(z)| \leqslant \frac{6(3 + r)}{(1 - r)^5} \quad \text{dla} \quad |z| = r. \tag{5b}$$

Równości w nierównościach (5a) i (5b) osiągnięte są przez funkcję

$$\varphi^*(z) = \frac{z}{(1 - e^{it}z)^2} \tag{6}$$

w punkcie $z = r e^{-it}$, która jako jednolistna jest średnio jednolistna.

Obecnie korzystając z oszacowań (5a) i (5b) i podstawowego związku między funkcjami średnio jednolistnymi i średnio p-listnymi, podamy oszacowanie drugiej i trzeciej pochodnej funkcji średnio p-listnej w kole K.

Niech $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots$ będzie funkcją średnio p-listną w sensie Biernackiego. Wówczas $\varphi(z) = [f(z)]^{1/p} = z + \dots$ jest funkcją średnio jednolistną w sensie Biernackiego ([3], str. 120).
Mamy więc

$$f(z) = [\varphi(z)]^p. \tag{7}$$

Różniczkując wzór (7), otrzymamy:

$$f'(z) = p[\varphi(z)]^{p-1} \cdot \varphi'(z),$$

a stąd przez ponowne różniczkowanie:

$$\begin{aligned} f''(z) &= p(p-1)[\varphi(z)]^{p-2}[\varphi'(z)]^2 + p[\varphi(z)]^{p-1} \cdot \varphi''(z), \\ f'''(z) &= p(p-1)(p-2)[\varphi(z)]^{p-3}[\varphi'(z)]^3 + 3p(p-1)[\varphi(z)]^{p-2}\varphi'(z) \cdot \varphi''(z) + \\ &\quad + p[\varphi(z)]^{p-1} \cdot \varphi'''(z). \end{aligned} \tag{8}$$

Zatem przy pomocy (2), (5a) i (5b) otrzymamy oszacowania

$$|f''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-2}}{(1-r)^{2p+2}}\left[(p+1)r^2 + 2(p+1)r + p-1\right] \quad \text{dla} \quad |z| = r, \tag{9a}$$

$$|f'''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-3}}{(1-r)^{2p+3}}\left[(p^2+3p+2)r^3+3(p^2+3p+2)r^2+3(p^2+p-2)r+p^2-3p+2\right] \text{ dla } |z|=r. \tag{9b}$$

Równości (9a) i (9b) osiągnięte są przez funkcję

$$f^*(z) = \frac{z^p}{(1 - e^{it} \cdot z)^{2p}}$$

w punkcie $z = r\,e^{-it}$.
Co więcej, ponieważ każda funkcja p-listna w zwykłym sensie, to znaczy, dla której liczba rozwiązań równania $f(z) = \omega$ w kole $|z| < 1$ jest co najwyżej równa p, a co najmniej dla jednego ω dokładnie równa p, jest funkcją średnio p-listną, więc oszacowania (9a) i (9b) są oszacowaniami dokładnymi także w klasie węższej, a mianowicie w klasie funkcji p-listnych w zwykłym sensie.

Uwagi. Jeżeli założymy, że dla współczynników funkcji średnio jednolistnych jest prawdziwa hipoteza Bieberbacha, to podobnie jak w [1] i [5] otrzymamy dokładne oszacowanie n-tej pochodnej funkcji średnio jednolistnej a mianowicie

$$\left|\varphi^{(n)}(z)\right| \leqslant n!\,\frac{n+r}{(1-r)^{n+r}}, \qquad |z| = r. \tag{10}$$

Korzystając z oszacowania (10) możemy uzyskać oszacowanie n-tej pochodnej funkcji średnio p-listnej dla każdego p. Ograniczymy się tu do podania oszacowania n-tej pochodnej funkcji 2,3 i 4-listnej.

1. $p = 2, \quad f(z) = [\varphi(z)]^2$.

Ze wzoru Leibniza mamy

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(z) \cdot \varphi^{(k)}(z). \tag{11}$$

Korzystając ze wzorów (10) i (11), otrzymamy

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|\varphi^{(n-k)}(z)\right| \cdot \left|\varphi^{(k)}(z)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!\,\frac{n-k+r}{(1-r)^{n-k+2}} \cdot k!\,\frac{k+r}{(1-r)^{k+2}} =$$

$$= \frac{n!}{(1-r)^{n+4}} \sum_{k=0}^{n} (n-k+r)(k+r).$$

Stąd

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{n!}{(1-r)^{n+4}} \sum_{k=0}^{n} (n-k+r)(k+r), \qquad |z| = r. \tag{12}$$

2. $p = 3, \quad f(z) = [\varphi(z)]^3$.

Ze wzoru Leibniza i (11) otrzymamy:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(z) \cdot \left[\varphi^2(z)\right]^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(z) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \varphi^{(k-i)}(z)\, \varphi^{(i)}(z)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{i!(k-i)!}\, \varphi^{(n-k)}(z) \cdot \varphi^{(k-i)}(z) \cdot \varphi^{(i)}(z) \Big) =$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(n-k)!(k-i)!\,i!}\, \varphi^{(n-k)}(z) \cdot \varphi^{(k-i)}(z) \cdot \varphi^{(i)}(z) \Big).$$

Stąd i (10) otrzymamy:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{n!}{(1-r)^{n+6}} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left[(n-k+r) \cdot \sum_{i=0}^{k} (k-i+r)(i+r)\right], \qquad |z| = r. \quad (13)$$

3. $p = 4, \quad f(z) = \left[\varphi(z)\right]^4.$

Przeprowadzając podobne rachunki jak w przypadku $p = 2$ i $p = 3$ otrzymamy

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{n!}{(1-r)^{n+8}} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{n-k} (n-k-i+r)(i+r) \cdot \sum_{j=0}^{k} (k-j+r)(j+r)\right], \quad |z| = r.$$

Gdy $p > 4$ wzór na n-tą pochodną staje się coraz bardziej skomplikowany.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1974 r.

LITERATURA

[1] Jakubowski Zb.J.: On the upper bound of the functional in some classes of univalent functions. Commentationes Math. XVII (1972) p. 65-69.

[2] Jenkins J.A.: On circumferentially mean p-valent functions. Trans. Amer Math. Soc. 79 1955 p. 423-428.

[3] Hayman W.K.: Mnogolistnyje funkcji. p. 117, p. 121. Moskwa 1960.

[4] Walczak S.: Oszacowanie $|f''(z)|$, $|f'''(z)|$, $|f^{(4)}(z)|$ funkcji klasy S. Zesz. Nauk. U.Ł. Ser. II, 39 p. 69-73. 1970.

[5] Walczak S.: Extremal problems in the class of close-to convex functions, Ann. Polon. Math. 25 (1971) p. 23-39.

ОСЕНКА ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КЛАССЕ ФУНКЦИИ p-ЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассмотривается класс функций p-листных в среднем в смысле Бернацкого в единичном круге K, т.е. таких функции для которых $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})d\varphi \leqslant p$ для всякого $R > 0$ где $n(\omega) = n(\omega,k,f)$ обозначает число решений уравнения $f(z) = \omega$ в K. В работе показано, что для функции етого

класса имеет место следующая оценка для второй и третьей производной:

$$|f''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-2}}{(1-r)^{2p+2}}\left[(p+1)r^2 + 2(p+1)r + p-1\right]$$

для $|z| = r$,

$$|f'''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-3}}{(1-r)^{2p+3}}\left[(p^2+3p+2)r^3 + 3(p^2+3p+2)r^2 + 3(p^2+p-2)r + p^2 - 3p + 2\right]$$

для $|z| = r$.

Экстремальной функцией является функция $f^*(z) = \frac{z^p}{(1-e^{it}z)^{2p}}$ в точке $z=re^{-it}$.

ESTIMATES OF THE SECOND AND THIRD DERIVATIVES IN THE CLASS OF MEAN P-VALENT FUNCTIONS

S u m m a r y

We consider the class of mean p-valent functions in Bernacki sense, defined in the unit disk K, i.m. functions such that $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})\,d\varphi < p$ for every $R > 0$ where $n(\omega) = n(\omega, k, f)$ is a number of solutions of equation $f(z) = \omega$ in K. Author obtained the sharp inequalities

$$|f''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-2}}{(1-r)^{2p+2}}\left[(p+1)r^2 + 2(p+1)r + p-1\right], \quad |z| = r$$

$$|f'''(z)| \leqslant \frac{pr^{p-3}}{(1-r)^{2p+3}}\left[(p^2+3p+2)r^3+3(p^2+3p+2)r^2+3(p^2+p-2)r+p^2-3p+2\right], \quad |z| = r$$

for the second and third derivatives of functions from this class. The extremal function is $f^*(z) = \frac{zp}{(1-e^{it}z)^{2p}}$ in point $z = r\,e^{-it}$.