ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Grażyna KOZŁOWSKA

ROZWIJANIE FUNKCJI $f(x,y) \in L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b]$ W SZEREG FOURIERA

Streszczenie. W pracy podano kryteria zbieżności w przestrzeniach $L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b]$ szeregów Fouriera wielomianów Jacobiego oraz funkcji układów Haara, Rademachera, Walsha i Franklina.

Oznaczenia

$L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b]$, gdzie $P = (p_1,p_2)$, $1 \leqslant p_1,p_2 < \infty$ i funkcja wagowa $p(x,y) = p(x)p(y)$, jest przestrzenią funkcji mierzalnych $f(x,y)$ określonych w kwadracie $[a,b;a,b]$, dla których $\|f(x,y)\|_{L^P_{p(x,y)}} < \infty$

$L^P[a,b;a,b]$ jak wyżej, przy czym $p(x,y) \equiv 1$

$$\|f(x,y)\|_{L^P_{p(x,y)}} = \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b p(x,y)\,|f(x,y)|^{p_1}\, dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2}$$

norma w $L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b]$

$\omega_{k,l}(x,y)$ ortonormalny układ funkcji z wagą $p(x,y)$

$$E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}} = \inf_{Q_{m,n}} \|f(x,y) - Q_{m,n}(x,y)\|_{L^P_{p(x,y)}}$$

gdzie $Q_{m,n}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{k,l}\,\omega_{k,l}(x,y)$

$$\|K_{m,n}(t,\tau;x,y)\|_{L^{(QP)}_{p(t,\tau),p(x,y)}} =$$

$$= \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b p(x,y) \left| \left(\int_a^b \left| \int_a^b p(t,\tau) \left|K_{m,n}(t,\tau;x,y)\right|^{q_1} dt \right|^{q_2/q_1} d\tau \right)^{1/q_2} \right|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2}$$

gdzie $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ i $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$ oraz $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$

I. Wstęp

Szereg Fouriera dla funkcji $f(x,y) \in L^P_{p(x,y)}$ $[a,b;a,b]$ jest postaci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}\, \omega_{k,l}(x,y),$$

gdzie

$$c_{k,l} = \int_a^b \int_a^b p(t,\tau) f(t,\tau)\, \omega_{k,l}(t,\tau)\, dt\, d\tau$$

a $\{\omega_{k,l}(x,y)\}$ jest ortonormalnym układem funkcji z wagą $p(x,y)$.
Sumą częściową tego szeregu jest

$$S_{m,n}[f;x,y] = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} c_{k,l}\, \omega_{k,l}(x,y) =$$

$$= \int_a^b \int_a^b p(t,\tau) f(t,\tau) \left[\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \omega_{k,l}(t,\tau)\, \omega_{k,l}(x,y) \right] dt\, d\tau \qquad (1)$$

Wyrażenie

$$K_{m,n}(t,\tau;x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \omega_{k,l}(t,\tau)\, \omega_{k,l}(x,y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \omega_k(t)\, \omega_k(x) \sum_{l=0}^{n} \omega_l(\tau)\, \omega_l(y) = K_m(t,x) K_n(\tau,y)$$

nazywa się jądrem całki (1).
Można zatem zapisać

$$S_{m,n}[f;x,y] = \int_a^b \int_a^b p(t,\tau) f(t,\tau) K_{m,n}(t,\tau;x,y)\, dt\, d\tau.$$

Ze związku (1) wynikają następujące własności:

Własność 1

$$S_{m,n}\left[f-g;x,y\right] = S_{m,n}\left[f;x,y\right] - S_{m,n}\left[g;x,y\right]$$

Własność 2

Jeśli $P_{m,n}(x,y) = P_m(x)P_n(y) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, \omega_k(x) \sum_{l=0}^{n} b_l\, \omega_l(y)$, gdzie funkcje $\omega_k(x)$ i $\omega_l(y)$ są funkcjami układów ortonormalnych w $[a,b]$ z wagami odpowiednio $p(x)$ i $p(y)$, to $S_{m,n}\left[P_{m,n};x,y\right] = P_{m,n}(x,y)$.

D o w ó d

$$S_{m,n}\left[P_{m,n};x,y\right] = \int_a^b \int_a^b p(t,\tau)P_{m,n}(t,\tau)K_{m,n}(t,\tau;x,y)dt\, d\tau =$$

$$= \int_a^b p(t)P_m(t)K_m(t,x)dt \int_a^b p(\tau)P_n(\tau)K_n(\tau,y)d\tau =$$

$$= \int_a^b p(t) \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha\, \omega_\alpha(t) \sum_{k=0}^{m} \omega_k(t)\omega_k(x)dt \int_a^b p(\tau) \sum_{\beta=0}^{n} b_\beta \omega_\beta(\tau) \sum_{l=0}^{n} \omega_l(\tau)\omega_l(y)d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k\, \omega_k(x) \sum_{l=0}^{n} b_l\, \omega_l(y) = P_m(x)P_n(y) = P_{m,n}(x,y).$$

II. Zbieżność szeregów Fouriera funkcji $f(x,y) \in L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b]$

Lemat 1

Jeśli $f(x,y) \in L^P_{p(x,y)}\left[a,b;a,b\right]$, to dla $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ i $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$, $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$ jest

$$\left\| S_{m,n}\left[f;x,y\right]\right\|_{L^P_{p(x,y)}} \leqslant \left\| f(x,y)\right\|_{L^P_{p(x,y)}} \left\| K_{m,n}(t,\tau;x,y)\right\|_{L^{(Q,P)}_{p(t,\tau);p(x,y)}}$$

D o w ó d. Korzystając dwukrotnie z nierówności Höldera otrzymuje się

$$\| S_{mn}[f;x,y] \|_{L^P_{p(x,y)}} = \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b p(x,y) \left| S_{m,n}[f;x,y] \right|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} =$$

$$= \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b p(x,y) \left| \int_a^b \int_a^b p(t,\tau) f(t,\tau) K_{m,n}(t,\tau;x,y) dt\, d\tau \right|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b p(x,y) \left| \int_a^b \left(\int_a^b \left| p(t,\tau)^{1/p_1} f(t,\tau) \right|^{p_1} dt \right)^{1/p_1} \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left(\int_a^b \left| p(t,\tau)^{1/q_1} K_{m,n}(t,\tau;x,y) \right|^{q_1} dt \right)^{1/q_1} d\tau \right|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b p(x,y) \left| \left(\int_a^b \left| \int_a^b p(t,\tau) f(t,\tau) \right|^{p_1} dt \right|^{p_2/p_1} d\tau \right)^{1/p_2} \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left(\int_a^b \left| \int_a^b p(t,\tau) \left| K_{m,n}(t,\tau;x,y) \right|^{q_1} dt \right|^{q_2/q_1} d\tau \right)^{1/q_2} \right|^{p_1} dx \right]^{p_2/p_1} dy \right\}^{1/p_2} =$$

$$= \| f(t,\tau) \|_{L^P_{p(t,\tau)}} \| K_{m,n}(t,\tau;x,y) \|_{L^{(Q,P)}_{p(t,\tau)p(x,y)}}$$

a stąd teza.

TWIERDZENIE 1. Jeśli

$$f(x,y) \in L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b] \quad \text{i} \quad \| P_{m,n}(x,y) - f(x,y) \|_{L^P_{p(x,y)}} = E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}}, \tag{2}$$

to

$$\| f(x,y) - S_{m,n}[f;x,y] \|_{L^P_{p(x,y)}} \leqslant$$

$$\leqslant E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}} \left(1 + \| K_{m,n}(t,\tau;x,y) \|_{L^{(Q,P)}_{p(t,\tau),p(x,y)}} \right)$$

D o w ó d. Ponieważ na podstawie własności 1 i 2

$$f(x,y) - S_{m,n}\left[f;x,y\right] = f(x,y) - P_{m,n}(x,y) + S_{m,n}\left[P_{m,n} - f;x,y\right],$$

więc stąd z założenia (2) i lematu 1

$$\left\|f(x,y)-S_{m,n}\left[f;x,y\right]\right\|_{L^P_{p(x,y)}} \leqslant E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}} + \left\|S_{m,n}\left[P_{m,n}-f;x,y\right]\right\|_{L^P_{p-x,y)}} \leqslant$$

$$\leqslant E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}} \left(1 + \left\|K_{m,n}(t,\tau;x,y)\right\|_{L^{(Q,P)}_{p(t,\tau),p(x,y)}}\right)$$

III. Kryteria zbieżności szeregów Fouriera wielomianów Jacobiego

Wielomiany Jacobiego dwóch zmiennych, to wielomiany stanowiące w kwadracie $[-1,1; -1,1]$ układ ortogonalny z wagą

$$p(x,y) = \left[(1-x)(1-y)\right]^{\alpha}\left[(1+x)(1+y)\right]^{\beta}, \quad \text{gdzie } \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Oznacza się je

$$J^{(\alpha,\beta)}_{m,n}(x,y) = J^{(\alpha,\beta)}_{m}(x)\, J^{(\alpha,\beta)}_{n}(y)$$

Wielomiany Jacobiego unormowane z dodatnimi współczynnikami przy najwyższych potęgach x i y oznacza się:

$$\hat{J}^{(\alpha,\beta)}_{m,n}(x,y) = \hat{J}^{(\alpha,\beta)}_{m}(x)\, \hat{J}^{(\alpha,\beta)}_{n}(y)$$

Jako szczególne przypadki otrzymuje się z wielomianów Jacobiego przy:

1. $\alpha = \beta = 0$ wielomiany Legendre'a $X_{m,n}(x,y)$
2. $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ wielomiany Czebyszewa $T_{m,n}(x,y)$
3. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ wielomiany Czebyszewa rodzaju drugiego $U_{m,n}(x,y)$
4. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ wielomiany $W_{m,n}(x,y)$.

Szereg Fouriera wielomianów Jacobiego dla funkcji

$$f(x,y) \in L^P_{p(x,y)}[-1,1; -1,1] \quad \text{jest postaci} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}\, \hat{J}^{(\alpha,\beta)}_{k,l}(x,y),$$

gdzie

$$c_{k,l} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p(t,\tau) f(t,\tau) \hat{J}^{(\alpha,\beta)}_{k,l}(t,\tau)\,dt\,d\tau$$

Z twierdzenia 1 wynikają następujące wnioski dla wielomianów Jacobiego:

Wniosek 1. Niech

$$\sigma = \max\{\alpha,\beta\} \geq -\frac{1}{2}, \quad f(x,y) \in L^{P}_{p(x,y)}[-1,1;-1,1] \quad \text{i}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} (mn)^{2\sigma+2} E_{m,n}(f)_{L^{P}_{p(x,y)}} = 0 \tag{3}$$

Jeśli $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$, to funkcja $f(x,y)$ w $L^{P}_{p(x,y)}[-1,1;-1,1]$ jest sumą szeregu Fouriera wielomianów Jacobiego w $L^{P}_{p(x,y)}[-1,1;-1,1]$. Natomiast jeśli $\alpha \in (-1,0)$ lub $\beta \in (-1,0)$, to funkcja $f(x,y)$ jest w tej przestrzeni sumą szeregu Fouriera wielomianów Jacobiego tylko dla tych P i Q, dla których $\max\left\{-\frac{p_1}{p_2}, -\frac{q_1}{q_2}\right\}$ jest mniejsze zarówno od α jak i od β.

D o w ó d. Z [1] (str. 419) dla $m \geq 1$ i $n \geq 1$ wynika, że

$$\| K_{m,n}(t,\tau;x,y)\|_{L^{(Q,P)}_{p(t,\tau),p(x,y)}} \leq$$

$$\left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[(1-x)(1-y)\right]^{\alpha}\left[(1+x)(1+y)\right]^{\beta}\Big|\Big(\int_{-1}^{1}\Big|\int_{-1}^{1}\left[(1-t)(1-\tau)\right]^{\alpha} \times\right.$$

$$\left.\times\left[(1+t)(1+\tau)\right]^{\beta}\left|M(mn)^{2\sigma+2}\right|^{q_1}dt\Big|^{q_2/q_1}d\tau\Big)^{1/q_2}\Big|^{p_1}dx\right]^{p_2/p_1}dy\right\}^{1/p_2} \tag{4}$$

gdzie M jest stałą zależną tylko od α i β.
Ponieważ

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = 2^{\alpha+\beta+1}\int_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}t^{\beta}dt$$

jest całką Eulera i jest zbieżna dla $\alpha > -1$, $\beta > -1$, więc dla $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$ całka (4) jest zawsze zbieżna, czyli

$$\| K_{m,n}(t,\tau;x,y)\|_{L^{P}_{p(t,\tau)p(x,y)}} \leq M(mn)^{2\sigma+2}C(p_1,p_2,\alpha,\beta)$$

a stąd z twierdzenia 1 i warunku (3) wynika, że $f(x,y)$ jest sumą szeregu Fouriera wielomianów Jacobiego.

Natomiast jeśli $\alpha\in(-1,0)$ lub $\beta\in(-1,0)$, to całka (4) jest zbieżna tylko dla tych P i Q, dla których

$$\frac{\alpha q_2}{q_1} > -1 \quad i \quad \frac{\beta q_2}{q_1} > -1 \quad \text{oraz} \quad \frac{\alpha p_2}{p_1} > -1 \quad i \quad \frac{\beta p_2}{p_1} > -1,$$

czyli dla α i β większych od $\max\left\{-\frac{p_1}{p_2}, -\frac{q_1}{q_2}\right\}$.

Z wniosku 1 wynikają natychmiast wnioski 2, 3, 4 i 5.

Wniosek 2 Jeśli

$$f(x,y)\in L^P[-1,1;-1,1] \quad i \quad \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}(mn)^2E_{m,n}(f)_{L^P} = 0,$$

to funkcja $f(x,y)$ jest w przestrzeni $L^P[-1,1;-1,1]$ sumą szeregu Fouriera wielomianów Legendre'a $X_{m,n}(x,y)$.

Wniosek 3. Jeśli

$$\alpha=\beta=\frac{1}{2}, \quad f(x,y)\in L^P_{p(x,y)}[-1,1;-1,1] \quad i \quad \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}(mn)^3E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}} = 0,$$

to funkcja $f(x,y)$ w $L^P_{p(x,y)}[-1,1;-1,1]$ jest sumą szeregu Fouriera wielomianów Czebyszewa rodzaju drugiego $U_{m,n}(x,y)$

Wniosek 4. Jeśli $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, $f(x,y)\in L^P_{p(x,y)}[-1,1;-1,1]$, $\min(\frac{p_1}{p_2}, \frac{q_1}{q_2}) > \frac{1}{2}$ i $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} mn\, E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}} = 0$, to $f(x,y)$ jest w $L^P_{p(x,y)}[-1,1;-1,1]$ sumą szeregu Fouriera wielomianów Czebyszewa $T_{m,n}(x,y)$.

Wniosek 5. Jeśli $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$, $f(x,y)\in L^P_{p(x,y)}[-1,1;-1,1]$, $\min(\frac{p_1}{p_2}, \frac{q_1}{q_2}) > \frac{1}{2}$ i $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}(m,n)^3E_{m,n}(f)_{L^P_{p(x,y)}} = 0$, to $f(x,y)$ jest w $L^P_{p-x,y)}[-1,1;-1,1]$ sumą szeregu Fouriera wielomianów $W_{m,n}(x,y)$.

IV. Kryteria zbieżności szeregów Fouriera funkcji układów Haara, Rademachera, Walsha i Franklina

a) układ Haara

Funkcje dwóch zmiennych układu Haara określa się następująco:

$$\chi_{m,n}^{(k,l)}(x,y) = \chi_m^{(k)}(x)\,\chi_n^{(l)}(y),$$

gdzie

$$\chi_\eta^{(1)}(0) = \sqrt{2^\eta},\quad \chi_\eta^{(2)}(1) = -\sqrt{2^\eta}$$

$$\chi_\eta^{(\varkappa)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^\eta} & \text{dla } t \left[\frac{2\varkappa-2}{2^{\eta+1}}, \frac{2\varkappa-1}{2^{\eta+1}}\right) \\ -\sqrt{2^\eta} & \text{dla } t \in \left(\frac{2\varkappa-1}{2^{\eta+1}}, \frac{2\varkappa}{2^{\eta+1}}\right] \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów przedziału } [0,1], \text{ przy czym } \eta = 0,1,2,\ldots,\ \varkappa = 1,2,\ldots 2^\eta . \end{cases}$$

Układ funkcji Haara jest układem ortonormalnym z wagą $p(x,y) \equiv 1$ w kwadracie $[0,1;\ 0,1]$.

Dla układu Haara z twierdzenia 1 wynika wniosek:

Wniosek 6. Jeśli

$$f(x,y) \in L^P[0,1;0,1] \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} (2^{m+1}-1)(2^{n+1}-1)E_{m,n}(f)_{L^P} = 0, \tag{5}$$

to funkcja $f(x,y)$ jest sumą szeregu Fouriera funkcji układu Haara w $L^P[0,1;0,1]$.

D o w ó d. Dla układu Haara

$$|K_{m,n}(t,\tau;x,y)| = |K_m(t,x)||K_n(\tau,y)| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{2^i}\chi_i^{(k)}(t)\chi_i^{(k)}(x)\right|\left|\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=1}^{2^j}\chi_j^{(l)}(\tau)\chi_j^{(l)}(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m} \left| \sum_{k=1}^{2^i} \chi_i^{(k)}(t)\chi_i^{(k)}(x) \right| \sum_{j=0}^{n} \left| \sum_{l=1}^{2^j} \chi_j^{(l)}(\tau)\chi_j^{(l)}(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m} 2^i \sum_{j=1}^{n} 2^j = (2^{m+1}-1)(2^{n+1}-1).$$

Zatem

$$\| K_{m,n}(t,\tau;x,y) \|_{L(Q,P)} \leqslant (2^{m+1}-1)(2^{n+1}-1)C(p_1,p_2),$$

a stąd z warunku (5) i twierdzenia 1 wynika teza.

b) <u>układ Rademachera</u>

Funkcje dwóch zmiennych układu Rademachera określone są następująco: $r_{k,l}(x,y) = r_k(x)r_l(y)$, gdzie

$$r_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = \frac{n}{2^i}, \text{ gdzie } n = 0,1,2,\dots,2^i \\ (-1)^n & \text{dla } \frac{n}{2^i} < t < \frac{n+1}{2^i}, \text{ gdzie } n = 0,1,2,\dots,2^i-1 \end{cases}$$

Układ funkcji Rademachera jest układem ortonormalnym w kwadracie $[0,1;0,1]$ z wagą $p(x,y) \equiv 1$.

Dla tego układu wynika z twierdzenia 1 następujący wniosek:

<u>Wniosek 7</u>. Jeśli:

$$f(x,y) \in L^P[0,1;0,1] \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} (mn)E_{m,n}(f)_{L^P} = 0, \tag{6}$$

to funkcja $f(x,y)$ jest sumą szeregu Fouriera funkcji układu Rademachera w przestrzeni $L^P[0,1;0,1]$.

D o w ó d. Ponieważ

$$|K_{m,n}(t,\tau;x,y)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |r_k(t)r_k(x)| \sum_{l=1}^{n} |r_l(\tau)r_l(y)| \leqslant mn,$$

więc

$$\| K_{m,n}(t,\tau;x,y)\|_{L(Q,P)} \leqslant mn\ C(p_1,p_2)$$

a stąd z warunku (6) i twierdzenia 1 wynika teza.

c) układ Walsha

Funkcje dwóch zmiennych układu Walsha określone są następująco:

$$\varphi_{m,n}^{(k,l)}(x,y) = \varphi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(l)}(y),$$

gdzie $\varphi_{\mu}^{(\varkappa)}(t)$ określa się za pomocą funkcji Haara

$$\sqrt{2^{\mu-1}}\varphi_{\mu}^{(\varkappa)}(t) = \chi_{\mu-1}^{(1)}(t) \pm \chi_{\mu-1}^{(2)}(t) \pm \ldots \pm \chi_{\mu-1}^{(2^{\mu-1})}(t)$$

przy $\mu \geqslant 1$, $\varkappa = 1,2,\ldots,2^{\mu-1}$.

Układ funkcji Walsha jest układem ortonormalnym w kwadracie $[0,1;0,1]$. Dla tego układu prawdziwy jest

Wniosek 8. Jeśli:

$$f(x,y) \in L^P[0,1;0,1] \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}(2^m-1)(2^n-1)E_{m,n}(f)_{L^P} = 0, \tag{7}$$

to w przestrzeni $L^P[0,1;0,1]$ $f(x,y)$ jest sumą szeregu Fouriera funkcji układu Walsha.

D o w ó d. Dla układu Walsha

$$\left|K_{m,n}(t,\tau;x,y)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{2^{i-1}}\varphi_i^{(k)}(t)\varphi_i^{(k)}(x)\right|\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{l=1}^{2^{j-1}}\varphi_j^{(l)}(\tau)\chi_j^{(l)}(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (2^m-1)(2^n-1), \tag{8}$$

bo

$$\left|\sum_{k=1}^{2^{i-1}}\sqrt{2^{i-1}}\varphi_i^{(k)}(t)\sqrt{2^{i-1}}\varphi_i^{(k)}(x)\right| = 2^{i-1}\left|\sum_{k=1}^{2^{i-1}}\varphi_i^{(k)}(t)\varphi_i^{(k)}(x)\right| \leqslant 2^{2(i-1)},$$

a stąd

$$\left|\sum_{k=1}^{2^{i-1}} \varphi_i^{(k)}(t)\varphi_i^{(k)}(x)\right| \leqslant 2^{i-1}$$

Analogicznie

$$\left|\sum_{l=1}^{2^{j-1}} \varphi_j^{(l)}(\tau)\varphi_j^{(l)}(y)\right| \leqslant 2^{j-1}$$

Z (7), (8) i twierdzenia 1 wynika teza.

d) <u>układ Franklina</u>

Funkcja dwóch zmiennych układu Franklina jest postaci $\varphi_{mn}(xy)=\varphi_m(x)\varphi_n(y)$ gdzie $\varphi_i(t)$ są funkcjami ortonormalnego układu otrzymanego metodą Schmidta z układu funkcji $\{\alpha_i(t)\}$. Natomiast funkcje $\alpha_i(t)$ są określone następująco: niech $\{\omega_i\}$ będzie ciągiem punktów $\{\omega_i\}=\{a,b,u_1^1,u_2^1,u_2^2,u_2^3,u_3^1,u_3^2,\ldots\}$, gdzie $u_i^k = a + \frac{k}{2^i}(b-a)$ $i = 1,2,3,\ldots$ $k = 1,2,\ldots,2^i-1$, $\alpha_1(t)$ niech będzie funkcją liniową taką, że $\alpha_1(a) = 1$, $\alpha_1(b) = 0$, $\alpha_2(t)$ funkcją liniową spełniającą warunki $\alpha_2(a) = 0$, $\alpha_2(b) = 1$, dla $i>2$, odcinek $[a,b]$ należy podzielić na i-2 części punktami $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{i-1}$ i jeśli $\omega_i\in[\omega_1, \omega_k]$, to poza tym przedziałem $\alpha_i(t) = 0$, a wewnątrz funkcja $\alpha_i(t)$ jest łamaną o wierzchołkach $\alpha_i(\omega_1) = \alpha_i(\omega_k) = 0$ oraz $\alpha_i(\omega_i) = 1$.
Z oszacowania podanego w [2] wynika, że:

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C_1\, i^{\frac{1}{2}}\, q^{i\left|\tau - \frac{\tau_i-a}{b-a}\right|},$$

gdzie C_1 i q są stałe, $0<q<1$, $\tau = \frac{t-a}{b-a}$, $\tau_i = a + \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}(b-a)$ $i=2^{\mu}+\nu$, $\nu = 1, \ldots, 2^{\mu}$, $\mu = 0,1,\ldots$
Ponieważ τ i $\frac{\tau_i-a}{b-a}$ należą do przedziału $[0,1]$, więc $\left|\tau - \frac{\tau_i-a}{b-a}\right| \leqslant 1$ zatem $|\varphi_i(t)| \leqslant C_2\, i^{\frac{1}{2}}$.
Stąd

$$|K_{m,n}(t,\tau;x,y)| \leqslant \sum_{k=1}^{m}|\varphi_k(t)\varphi_k(x)| \sum_{l=1}^{n}|\varphi_l(\tau)\varphi_l(y)| \leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{k=1}^{m} k\sum_{l=1}^{n} l = C_4\, mn(m+1)(n+1) < C_4(m+1)^2(n+1)^2$$

Jest więc

$$\|K_{mn}(t,\tau;x,y)\|_{L(Q,P)} \leqslant C(p_1,p_2)(m+1)^2(n+1)^2.$$

Wynika stąd, że prawdziwy jest następujący wniosek z twierdzenia 1

Wniosek 9. Jeśli

$$f(x,y) \in L^P[a,b;a,b] \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} (m+1)^2(n+1)^2 E_{m,n}(f)_{L^P} = 0,$$

to $f(x,y)$ jest sumą szeregu Fouriera funkcji układu Franklina w $L^P[a,b;a,b]$.

Panu Profesorowi Julianowi Musielakowi pragnę podziękować za wiele cennych uwag dotyczących tej pracy.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1974 r.

LITERATURA

[1] Natanson I.P.: Konstruktiwnaja tieorija funkcji. Moskwa 1949 r.
[2] Ciesielski Z., Domsta J.: Estimates for the spline orthonormal functions and for their derivatives. Stud.Math. 44, N-4, 1972.
[3] Kaczmarz S., Steinhaus H.: Teorija ortogonalnych rjadow. Moskwa 1958.

РЯДЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ $f(x,y) \in L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b]$

Р е з ю м е

В этой статьи представлены критерия сходимости рядов Фурье в пространствах $L^P_{p(x,y)}[a,b;a,b]$. Рассматривается ряды Фурье построены из полиномов Якоби, функции системов Хаара, Радемахера, Уолша и Франклина.

FOURIER SERIES FOR THE FUNCTION $f(x,y) \in L^{P}_{p(x,y)}[a,b;a,b]$

S u m m a r y

In this paper there are given convergence criteria for Fourier series in the spaces $L^{P}_{p(x,y)}[a,b;a,b]$ with mixed norm, where Fourier series are taken with respect to systems of Jacobi, Haar, Rademacher, Walsh and Franklin functions.