Adam CZECH

O STABILNOŚCI PEWNYCH RÓWNAN HIPERBOLICZNYCH Z ŁOSOWYMI WSPÓŁCZYNNIKAMI

Streszczenie. Rozważamy zagadnienia związane ze stabilnością rozwiązań pewnych równań hiperbolicznych, których współczynniki są czasowo-przestrzennymi procesami stochastycznymi z niejednorodnymi warunkami brzegowymi. Do badania używamy między innymi zmodyfikowanych nierówności energetycznych.

Wstęp

W pracy rozważamy dwa różne zagadnienia mieszane dla pewnych układów hiperbolicznych. W części pierwszej rozważymy zadanie mieszane dla równania hiperbolicznego spełniającego warunki Łopatińskiego i do badania stabilności wykorzystamy nierówność energetyczną wyprowadzoną przez Rentaro Agemi w pracy [1]. W części drugiej uogólnimy wyniki uzyskane przez P.K.C Wanga na przypadek niejednorodny. W całej pracy przyjmujemy założenie, że realizacje występujących procesów stochastycznych są na tyle gładkie, że zapewniają istnienie i jednoznaczność rozważanych zadań brzegowych.

1. Nierówność energetyczna i zadanie mieszane (P.B)

Niech R^n_+ będzie otwartą półprzestrzenią $x = (x, x_n), x_n > 0$, a $\bar{R}^n_+$ jest jej domknięciem.
Rozważmy w $[0, T] \times \bar{R}^n_+$ $(T > 0)$ operator hiperboliczny:

$$P(t,x,\omega;D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\sum_{j=1}^{n} a_j(t,x,\omega)\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_j} - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t,x,\omega)\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k} \tag{1.1}$$

gdzie ω jest elementem pewnej przestrzeni probabilistycznej.
Założymy, że dla prawie każdego ω, dowolnego $(t,x) \in [0,T] \times \bar{R}^n_+$ i dowolnego $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n) \in R^n$ i różnego od zera zachodzą nierówności

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left\{ a_{jk}(t,x,\omega) + a_j(t,x,\omega)a_k(t,x,\omega) \right\} \xi_j \xi_k > \tag{1.2}$$

$$a_{nn}(t,x,\omega) > 0 \tag{1.3}$$

Przyjmiemy także, że dla każdego ω, a_{jk} są symetryczne.

Na $[0,T] \times (\bar{R}^n_+ \setminus R^n_+)$ rozpatrzymy operator brzegowy:

$$B(t,x',\omega;D) = \frac{\partial}{\partial x_n} - \sum_{j=1}^{n-1} b_j(t,x',\omega) \frac{\partial}{\partial x_j} - c(t,x',\omega) \frac{\partial}{\partial t} + g(t,x',\omega) \quad (1.4)$$

Przyjmiemy, że zadanie (P,B) spełnia następujące

<u>Założenie I.1</u>. Niech (L_1)

$$P\left\{\omega: a_{nn}(t,x,\omega)c(t,x',\omega) + a(t,x,\omega) \geqslant 0\right\} = 1 \quad (1.5)$$

(L_2) dla prawie każdego ω forma kwadratowa $H(t,x,\sigma)$ jest dodatnio półokreślona, gdzie:

$$H(t,x,\sigma) = (a_{nn}c+a_n)^2(a_{nn}\gamma-\delta)^2-2(a_{nn}c+a_n)(a_{nn}\alpha-a_n)(a_{nn}\alpha-a_n\delta),$$

$$(a_{nn}\beta\cdot\delta) - (a_{nn}+a_n^2)(a_{nn}\beta+\delta)^2$$

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x,\omega)\sigma_j \qquad \beta = \sum_{j=1}^{n-1} b_j(t,x,\omega)\sigma_j$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t,x,\omega)\sigma_j \qquad \gamma = \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{jk}(t,x,\omega)\sigma_j\sigma_k$$

$$\sigma \in R^{n-1}$$

Rozważymy zadanie mieszane

$$P(t,x,\omega;D)u = N(u,\omega) + f(t,\omega) \qquad N(0,\omega) \equiv 0$$

$$u(0,x,\omega) = \eta_1(x,\omega) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,\omega) = \eta_2(x,\omega) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}(0,x,\omega) = \zeta_1(x,\omega) \quad (1.6)$$

$$B(t,x',\omega;D)u = \zeta(t,x',\omega)$$

Wprowadzimy definicję stabilności:

DEFINICJA I.1. Rozwiązanie trywialne zadania mieszanego (1.6) nazwiemy stabilnym wg średniej w przedziale $[0, T]$, jeżeli:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{\delta>0} E\left[\|u(0,\circ,\omega)\|_1 + \langle\!\langle u(t, ,0,\omega)\rangle\!\rangle_1^* + \|f(t,x,\omega)\|_0^*\right] < \delta \Rightarrow$$

$$\bigwedge_{t\in[0,T]} E\|u(t,x,\omega)\|_1 \leqslant \varepsilon$$

TWIERDZENIE 1.1. Niech będzie spełnione założenie 1.1 oraz warunek:

$$\|N(u,\omega)\|_0 \leqslant C(\omega)\|u\|_1 \leqslant C_1\|u\|_1$$

Wtedy rozwiązanie trywialne zadania (1.6) jest stabilne w sensie definicji 1.1.

D o w ó d. Ustalimy ω i rozpatrzymy odpowiadającą mu realizację $u\,(t,x)$. Realizację współczynników spełniają warunki (L_1) o (L_2), a więc na mocy rezultatów osiągniętych w pracy [1] ma miejsce następująca nierówność energetyczna:

$$\|u\,(t,\circ)\|_1^2 + \int_0^t \langle\!\langle u_\omega(s,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^2 \leqslant K\Big(\int_0^t \|(Pu_\omega)(s,\circ)\|_a^2 +$$

$$+ \int_0^t \langle\!\langle (Bu_\omega)(s,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^2 ds + \|u_\omega(0,\circ)\|_1^2 \;,$$

gdzie:

$$\|u_\omega(\circ)\|_0^2 = \|u_\omega(\circ)\|^2_{L^2(R^n)}; \; \|u_\omega(t,\circ)\|_1^2 = \|u_\omega(t,\circ)\|_0^2 + \|\frac{\partial u}{\partial t}\;(t,\circ)\|_0^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \|\frac{\partial u_\omega}{\partial x_j}\,(t,\circ)\|_0^2,$$

natomiast

$$\langle\!\langle u_\omega(t,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^2 = \langle\!\langle u_\omega(t,\circ,0)\rangle\!\rangle^2 + \langle\!\langle \frac{\partial u_\omega}{\partial t}\,(t,\circ,0)\rangle\!\rangle^2 + \sum_{j=1}^n \langle\!\langle \frac{\partial u_\omega}{\partial x_j}\,(t,\circ,0\rangle\!\rangle^2;$$

$$\langle\!\langle u_\omega(t,\circ,0)\rangle\!\rangle$$

jest normą indukowaną przez iloczyn skalarny $\langle \circ , \circ \rangle$ w przestrzeni $L^2(\overline{R^n_+} \setminus R^n_+)$. Nierówność energetyczna zachodzi dla $t \in [0,T]$.
Biorąc pod uwagę, że drugi człon po lewej stronie nierówności energetycznej jest dodatni, możemy ją przepisać w postaci:

$$\| u_\omega(t,\circ)\|_1^2 \leqslant K\int_0^t Pu_\omega(s,\circ)\|_o^2 ds + K\tau\int_0^t \langle\!\langle Bu_\omega(s,\circ,0\rangle\!\rangle_1^2 ds + \|u_\omega(0,\circ)\|_1^2 \tag{1.7}$$

Wykorzystując założenie dotyczące nieliniowości, mamy:

$$\|(Pu_\omega)(s,\circ)\|_o^2 = \| N(u,\omega) + f_\omega(t,\circ)\|_o^2 \leqslant 2\| N(u,\omega)\|_o^2 + 2\|f(t,\circ)\|_o^2 \tag{1.8}$$

Uwzględniając (1.8) z (1.7) otrzymujemy:

$$\|u_\omega(t,\circ)\|_1^2 \leqslant K_1\int_0^t \left[\| N(u,\omega)\|_o^2 + \|f\ (s,\circ)\|_o^2\right] ds + K_1\int_0^t \langle\!\langle Bu_\omega(s,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^2 ds + K\|u_\omega(0,\circ)\|_1^2, \tag{1.9}$$

ponieważ $\int_0^t (\circ) ds \leqslant \int_0^T (\circ) ds$, gdy funkcja podcałkowa jest dodatnia, to przyjmiemy:

$$\left[\langle\!\langle (Bu_\omega)(s,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^*\right]^2 = \int_0^T \langle\!\langle (Bu_\omega)(s,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^2 ds \tag{1.10}$$

$$\left[\| f_\omega(t,c)\ _o^*\right]^2 = \int_0^T \|f_\omega(s,\circ)\|_o^2 ds \tag{1.11}$$

Nierówność (1.9) może być przepisana w postaci:

$$\| u_\omega(t,\circ)\|_1^2 \leqslant C_1K_1\left[\int_0^t \|u_\omega(s,\circ)\|_1^2 ds + K_1\ \left[f(t,\circ)\|_o^{*2} + \langle\!\langle Bu_\omega(s,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^{*2}\right]\right. \tag{1.12}$$

Wykorzystując nierówność Gronwalla-Bellmana z (1.12), mamy:

$$\|u_\omega(t,\circ)\|_1^2 \leqslant K_1\left[\| f_\omega(t,\circ)\|_o^{*2} + \langle\!\langle Bu_\omega(t,\circ,0)\rangle\!\rangle_1^{*2}\right] e^{KC_1T} \tag{1.13}$$

Ponieważ powyższa nierówność zachodzi dla prawie każdego ω, więc

$$\| u(t,\circ,\omega)\|_1^2 \leqslant K_1 \left[\|f(t,\circ,\omega)\|_0^{*2} + \langle\!\langle Bu(t,\circ,0,\omega)\rangle\!\rangle_1^{*2}\right] e^{KC_1T} \tag{1.14}$$

Pierwiastkując obustronnie i wykorzystując oczywistą nierówność:

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$$

dla $a,b \geqslant 0$ mamy:

$$\| u(t,\circ,\omega)\|_1^{*} \leqslant D\left[\|f(t,\circ,\omega)\|_0^{*} + \langle\!\langle Bu(t,\circ,0,\omega)\rangle\!\rangle_1^{*}\right], \tag{1.15}$$

gdzie $D = \sqrt{K\exp[KC_1T]}$. Uśredniając obustronnie i biorąc pod uwagę, że nierówność (1.15) zachodzi dla dowolnego $t \in [0,T]$, otrzymujemy tezę twierdzenia.

Przykład

Rozpatrzymy jako przykład równanie struny:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad u_t(0,x) = \psi(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1.16}$$

$$u(t,0) = \xi_1(t,\omega) \qquad u(t,1) = \xi_2(t,\omega)$$

przy czym na warunki brzegowe i początkowe nałożymy następujące ograniczenia:

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0 \qquad P\{\omega:\ \xi_1(0,\omega) = \xi_2(0,\omega) = 0\} = 1 \tag{1.17}$$

$$\varphi(1) = \psi(1) = 0 \qquad P\{\omega:\ \xi_1(1,\omega) = \xi_2(1,\omega) = 0\} = 1 \tag{1.17}$$

Dla badania stabilności zadania (1.16) wyprowadzimy pewną nierówność analogiczną do nierówności energetycznej. Oznaczymy:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (r(x)[u_t]^2 + p(x)[u_x]^2)\,dx \tag{1.18}$$

Wykonując proste przekształcenia (patrz [3]) (1.18) można przedstawić w postaci:

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \left[p(1)u_x(1,t)u_t(1,t) - p(0)u_x(0,t)u_t(0,t)\right]dt \qquad (1.19)$$

$$|E(t)| \leqslant |E(0)| + \left|\int_0^t p(1)u_x(1,t)u_t(1,t)dt\right| + \left|\int_0^t p(0)u_x(0,t)u_t(0,t)\,dt\right| \qquad (1.20)$$

Będziemy badać stabilność rozwiązania trywialnego zadania (1.16) w klasie procesów, których prawie wszystkie realizacje są ograniczone i mają ograniczoną przez wspólną stałą M pochodną . Przyjmiemy, że funkcje $p(x)$ i $r(x)$ są ciągłe i nie mają zer w przedziale $[0,1]$. Wtedy istnieje stała M_1 taka, że:

$$|E(t)| \leqslant |E(0)| + M_1\left[|\zeta_1(t,\omega)| + |\zeta_2(t,\omega)|\right] \qquad (1.21)$$

Z kolei

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 (r(x)[\chi'(x)]^2 + p(x)[\varphi'(x)]^2)dx \leqslant N_1 \int_0^1 [\varphi'(x)]^2 + [\chi'(x)]^2)dx \qquad (1.22)$$

gdzie

$$N_1 = \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} \{r(x), p(x)\}.$$

Przyjmiemy:

$$\int_0^1 ([\varphi(x)]^2 + [\chi'(x)]^2)\,dx = \| u(0,\circ,\omega)\|_1^{*2}$$

Ponieważ nierówność (1.21) zachodzi dla dowolnego $t \in [0,T]$, więc:(A)

$$|E(t)| \leqslant N_1\|u(0,\circ,\omega)\|_1^{*2} + M_1 \sup_{t\in[0,T]} \left[|\zeta_1(t,\omega)| + \zeta_2(t,\omega)|\right] \qquad (1.23)$$

Ale

$$|u(t,x,\omega)| \leqslant \int_0^x |u_x|dx =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\sqrt{p(x)}\,|u_x|dx \leqslant \left[\int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\right)^2 dv\right]^{1/2}\left[\int_0^x p(x)(u_x)^2dx\right)^{1/2} \leqslant N_2|E(t)|^{1/2} \qquad (1.24)$$

Otrzymujemy podstawową nierówność:

$$|u(t,x,\omega)\| \leqslant N_2|E(t)|^{1/2} \tag{1.25}$$

z której wynika, że:

$$\left[\int_0^1 |u(t,x,\omega)|^2 dx\right]^{1/2} \leqslant N_3|E(t)|^{1/2} \tag{1.26}$$

Oznaczając tym razem wartość przeciętną przez M i $\|u\|$ przez

$$\left[\int_0^1 |u(t,x,\omega)|^2\right]^{1/2} \tag{1.27}$$

otrzymujemy:

$$M\,\|\vartheta(t,x,\omega)\| \leqslant N_3 M\, E(t)|^{1/2}$$

Z nierówności (1.27) i (1.23) otrzymujemy tezę przykładu.

2. Badanie stabilności pewnego układu hiperbolicznego

Rozpatrzymy teraz symetryczny hiperboliczny układ postaci:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x)u(t,x)) + (B_0(x)+B_1(t,x)) + f(t,u), \tag{2.1}$$

gdzie A_i i B_0 są NxN wymiarowymi macierzami, których elementy są funkcjami $x, f(t,u)$ jest n-wymiarowym wektorem, którego składowe są procesami stochastycznymi, podobnie jak niezerowe wyrazy macierzy B_1. Macierze A_i są symetryczne i ciągłe różniczkowalne.

Przyjmiemy, że układ jest określony w pewnym obszarze D n-wymiarowej przestrzeni x, $t \in [0, \infty)$. Macierz B_0 jest ciągła w $\bar{D}$. Wprowadzimy normę

$$v = \|u(t,x,\omega)\|^2 = \int_0 u(t,x)u(t,x)dD = \langle u(t,x), u(t,x)\rangle \tag{2.2}$$

znak " " oznacza transpozycję.

Mamy:

$$\frac{dv}{dt} = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x)u(t,x), u(t,x)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle u(t,x), \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x)u(t,x)\right\rangle + \left\langle u(t,x), (B_t' + B_o)u(t,x)\right\rangle$$

$$+ \left\langle u(t,x), (B_1'(t,x) + B_1(t,x), u(t,x)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle f(t,u), u(t,x)\right\rangle + \left\langle u(t,x), f(t,u)\right\rangle \tag{2.3}$$

Wykorzystując założenie, że A_i są symetryczne i ciągłe różniczkowalne w $\bar{D}$, można (2.3) przedstawić w postaci:

$$\frac{dv}{dt} = \int_P \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(u'(t,x)A_i(x)u(t,x))d\rangle +$$

$$+ \left\langle B_o'(x) + B_o(x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i} u(t,x), u(t,x)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle (B_1(t,x) + B_1(t,x))u(t,x), u(t,x)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle f(t,u), u(t,x)\right\rangle + \left\langle u(t,x), f(t,u)\right\rangle \tag{2.4}$$

Oznaczając przez n_i składowe wektora normalnego do brzegu obszaru D który oznaczymy przez ∂D, mamy:

$$\frac{dv}{dt} = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{N} u'(t,x)A_i(x)u(t,x)n_i d(\partial D) \tag{2.5}$$

Przyjmiemy dla układu (2.1) lokalne warunki brzegowe postaci:

$$\int_{\partial D} \sum_{r=1}^{N} u'(t,x)A_i(x)u(t,x)n_i d(\partial D) = \xi(t,\omega) \tag{2.6}$$

gdzie $\xi(t,\omega)$ jest procesem stochastycznym. Oznaczymy:

$$J(x) = B_o'(x) + B_o(x) + \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial A_1(x)}{\partial x} \tag{2.7}$$

i przez $\sigma(J(x))$ oznaczymy spectrum $J(x)$ przy ustalonym x. Przyjmiemy:

Założenie 2.1. Niech:

(1) $\langle f(t,u),u(t,x)\rangle + \langle u(t,x)f(t,u) \leqslant \varrho(t,\omega)v$

(2) istnieje $\sup\limits_{x \in D} \sigma(J(x)) < 0$

Mamy:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant |\xi(t,\omega)| \cdot \left[\sup_{x \in O} \sigma(J(x)) + \| B_1'(t,x) + B_1(t,x)\|_1 + \eta(t,\omega)\right]v \tag{2.8}$$

$$v(t) - v(0) \leqslant \int_0^t |\xi(s,\omega)|ds \cdot \int_0^t \left[\sup_x \sigma(J(x)) + \| B_1'(s,x) + B_1(s,x)\|_1\right]vds \tag{2.9}$$

Dla układu (2.1) z warunkiem brzegowym (2.6) możemy udowodnić następujące

TWIERDZENIE 2.1. Niech

$$\sup_{x \in D} \sigma(J(x)) + \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\| B_1'(s,x) + B_1(s,x)\|_1 + \eta(s,\omega)\right] ds < 0 \tag{2.10}$$

oraz niech wypełnione będzie założenie (2.1). Wtedy układ (2.1) jest stabilny asymptotycznie w sensie Lapunowa o ile realizacje procesów $B_1(t,x)$ i $\eta(t,x)$ są ciągłe z prawdopod. 1.

D o w ó d. Zastosujemy do (2.9) nierówność Gronwalla-Bellmana. Otrzymamy wtedy:

$$v(t) \leqslant \left[v(0) + \int_0^t |\xi(s,\omega)ds\right] \exp t(\sup_{x \in D} \sigma(J(x)) +$$

$$+ \frac{1}{t} \int_0^t \left[\| B_1'(s,x) + B_1(s,x)\|_1 + \eta(s,\omega)\right] ds| \tag{2.11}$$

z (2.11) wynika przy założeniu, że:

$$\int_0^{\infty} |\zeta(s,\omega)| ds < \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0 \tag{2.12}$$

Dla prawie każdego ω funkcja

$$\exp t\left[\sup_{x\in D} \sigma(J(x)) + \frac{1}{t}\int_0^t \left[\| B_1'(s,x) + B_1(s,x)\|_1 + \eta(s,\omega)\right] ds\right]$$

jest ciągła w przedziale $[0,\infty)$, a z (2.12) wynika, że jest w tym przedziale ograniczona przez pewną stałą M. Z (2.11) mamy:

$$v(t) \leqslant \left[v(0) + \int_0^{\infty} |\zeta(s,\omega)| ds\right] M. \tag{2.13}$$

uśredniając, otrzymujemy:

$$\left[E\, v(t)\right]^{1/2} \leqslant \left[(v(0))^{1/2} + (E\int_0^{\infty} |\zeta(s,\omega)| ds|^{1/2}\right] M \tag{2.14}$$

przyjmując jako normę z warunków brzegowych

$$\|\zeta(t,\omega)\|_1 = E\left[\int_0^{\infty} |\zeta(s,\omega)| ds\right]$$

i jako $\|u(0,x,\omega)\|_0 = \sqrt{v(0)}$ oraz $\|u(t,x,\omega)\| = [Ev(t)]^{1/2}$ otrzymujemy tezę twierdzenia w sensie definicji o stabilności wg trzech norm.

Wpłynęło do Redakcji w listopadzie 1973 r.

LITERATURA

[1] Agemi Rentaro: On energy inequalities of mixed problems for hiperbolic eqvations of second order. Journ. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I. Vol. 22 N 2 (1971).

[2] Wang P.K.C.: On the almost sure stability of linear stochastic distributed parameter dynamical systems. Journal of applied mechanic. 33. Trans. AS.ME series E, No I, March 1966.

[3] Krikunow: Liekcji po urawnieniach matiematiczieskoj fizyki i intiegralnym urawnienia. Izd. Kazan. Uniw. 1968.

[4] Tylikowski A.: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej w Gliwicach, z. 330, 1972 r.

СТАБИЛИТЫ НЕКОТОРЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИИ

Р е з ю м е

В работе указаны чсловия устойчивости уравнений гиперболического типа.

К иследованию устойчивости применены: неравенство Гронуолла-Беллмана и обобщённые энергетические неравенства.

ON THE STABILITY SOME HIPERBOLIC EQUATIONS

S u m m a r y

In this paper we investigate two different mixed problems for some hiperbolic systems. In part one we consider a mixed problem for hiperbolic equations fullfiling Łopatinski s conditions and to investigation stability we opply energetic inequality deceived by Rentaro A gemi in work (I).

We generalized results deceived by P.K.C. Wang in part two.