ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Ewa SZOCIŃSKA

O STABILNOŚCI PEWNYCH UKŁADÓW CIĄGŁYCH Z OPÓŹNIONYM ARGUMENTEM

Streszczenie. W pracy tej badana jest stabilność pewnych układów równań różniczkowych cząstkowych z opóźnionym argumentem przy zaburzeniach losowych. Uzyskano dla nich szereg kryteriów stabilności wykorzystując półgrupowy operator przejścia.

I. Uwagi wstępne

Rozpatrzymy układ postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_o\, u(t,x) + B(t,x,\omega)u(t-\tau,x) +$$

$$+ h(t,x,u(t,x),\ u(t-\tau,x)) + F_o(t,x)u(t,x) +$$

$$+ F_1(t,x)u(t-\tau,x) \tag{1}$$

z warunkiem początkowym

$$u(t,x) = \varphi(t,x) \quad \text{dla} \quad t \in \left[t_o-\tau, t_o\right] \tag{2}$$

i warunkiem brzegowym

$$\mathfrak{B}u(t,x) = 0 \quad \text{dla} \quad (t,x) \in \partial G x [t_o,\infty) \tag{3}$$

gdzie L_o jest macierzowym operatorem różniczkowym, zawierającym pochodne względem zmiennych przestrzennych o stałych współczynnikach, B jest n x n wymiarową macierzą, której niezerowe elementy są czasowo - przestrzennymi procesami stochastycznymi, $h(t,x,u,v)$ jest n wymiarowym kolumnowym wektorem funkcyjnym, F_o i F_1 są pewnymi całkowymi operatorami ograniczonymi (w sensie ograniczonej normy $\|F_i\| = \sup\limits_{\|u\| = 1} \|F_i u\|$).

Przyjmujemy, że układ określony jest w zbiorze walcowym $Gx[t_o,\infty)$, gdzie G pewien zbiór otwarty i spójny w przestrzeni R_n, t_o może w szczególności być równe zeru. Przez S_t oznaczymy stan rozpatrywanego układu w chwili t i przestrzeń stanów oznaczymy przez Γ.

Niech w dalszych rozważaniach spełnione będzie

Założenie A:

a) przestrzeń stanów Γ jest przestrzenią Banacha z ustaloną normą $\|u\|$ i $\|u\| < \infty$ dla dowolnego stanu,

b) L_0 przy warunku brzegowym $\mathcal{B} u = 0$ generuje półgrupę operatorów przejścia $\{\phi(t,t_0)\}$ $0 \leqslant t, t_0 < \infty$,

c) $\|\phi(t,\tau)\| \leqslant C \exp - \gamma(t - \tau)$,

d) $\|h(t,x,u,v)\| \leqslant K_0(t)\|u\| + K_1(t)\|v\|$ gdzie $K_0(t)$ i $K_1(t)$ są ciągłymi, nieujemnymi funkcjami dla dowolnych, ograniczonych u i v oraz $h(t,x,0,0) = 0$.

Założenia b) i c) są równoważne temu, że zdeterminowana i liniowa część układu ma własności układu, którego stan zerowy jest asymptotycznie ekspotencjalnie stabilny. Rozpatrywane układy można interpretować jako układy dynamiczne z przesuniętym w czasie kontrolnym sprzężeniem zwrotnym. Wprowadzimy następującą definicję stabilności:

DEFINICJA 1. Mówimy, że rozwiązanie trywialne układu (1) jest asymptotycznie stabilne, jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \sup_{t\in[t_0-\tau,t_0]} \|\psi(t,x)\| < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t>t_0} \|u(t,x)\| < \varepsilon \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,x)\| = 0. \tag{5}$$

Jeśli powyższe relacje są prawdziwe dla prawie każdego ω , mówimy o stabilności z prawdopodobieństwem jeden. Jeśli zachodzi tylko (4), mówimy o stabilności w sensie Kozina. Normy $\|B\|$, $\|F_0\|$, $\|F_1\|$ są normami operatorów generowanymi przez normę $\|\cdot\|$.

II. Kryteria stabilności

Wykorzystując operator przejścia ϕ możemy układ (1) zapisać w postaci równania całkowego

$$u(t,x) = \phi(t,t_0)\psi(t_0,x) + \int_{t_0}^{t} \phi(t,t')\Big[B(t'_1,x,\omega)\, u(t'-\tau,x) +$$

$$+ h(t',x,u(t',x), u(t'-\tau,x)) + F_0(t',x)\, u(t',x) + F_1(t',x)\, u(t'-\tau,x)\Big]dt' \tag{6}$$

Przechodząc w (6) do normy i wykorzystując założenie A, mamy

$$\|u(t,x)\| \leqslant C \,\|\varphi(t_o,x)\|\, \exp - \gamma(t-t_o) +$$

$$+ C \int_{t_o}^{t} \exp - \gamma(t-t') \Big\{ \big[K_o(t') + \|F_o(t',x)\|\big] \; u(t',x)\| +$$

$$+ \big[K_1(t') + \|F_1(t',x)\| + \|B(t',x,\omega)\|\big] \|u(t'-\tau,x)\| \Big\} \; dt' \qquad (7)$$

Dla skrócenia zapisu wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} K_o(t) + \|F_o(t,x)\| &= R_o(t) \\ K_1(t) = \|F_1(t,x)\| &= R_1(t) \end{aligned} \qquad (8)$$

Związek (7) przybierze więc postać:

$$\|u(t,x)\| \leqslant C \exp - \gamma(t-t_o) \,\|\varphi(t_o,x)\| +$$

$$+ C \int_{t_o}^{t} \exp - \gamma(t-t') \, R_o(t') \,\|u(t',x)\|\, dt' +$$

$$+ C \int_{t_o}^{t} \exp - \gamma(t-t') \big[R_1(t') + \|B(t',x,\omega)\|\big] \|u(t'-\tau,x)\| \, dt' \qquad (9)$$

Wprowadźmy podstawienie $t'' = t' - \tau$ w drugiej całce. Mamy wtedy

$$\|u(t,x)\| \leqslant C \exp - \gamma(t-t_o) \,\|\varphi(t_o,x)\| +$$

$$+ C \int_{t_o}^{t} \exp - \gamma(t-t') \, R_o(t') \|u(t',x)\| \, dt' +$$

$$+ \int_{t_o-\tau}^{t-\tau} C \exp - \gamma(t-t''-\tau) \big[R_1(t''+\tau) + \|B(t''+\tau,x,\omega)\|\big] \|u(t'',x)\| dt'' \qquad (10)$$

Ponieważ wyrażenia podcałkowe są nieujemne, mamy oczywiście

$$\int_{t_o-\tau}^{t-\tau} = \int_{t_o-\tau}^{t_o} + \int_{t_o}^{t-\tau} \leqslant \int_{t_o-\tau}^{t_o} + \int_{t_o}^{t}$$

A więc

$$\| u(t,x)\| \leqslant C \exp -\gamma\|(t-t_o)\| \, \| \varphi(t_o,x) \| +$$

$$+ C \int_{t_o}^{t} R_o(t') \, \| u(t,x)\| \, dt' + C \int_{t_o-\tau}^{t_o} \exp - \gamma(t-t'') \exp \gamma\tau\Big[R_1(t''+\tau) +$$

$$+ \| B(t''+\tau,x,\omega)\|\Big] \, \|\varphi(t'',x)\| dt'' +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} C\Big[R_1(t''+\tau) + \| B(t''+\tau,x,\omega)\|\Big] \, \| u(t'',x)\| \quad x$$

$$x \exp \gamma\tau \exp - \gamma(t-t'') \, dt'' \tag{11}$$

Biorąc pod uwagę, że $\gamma, \tau > 0$, mamy $\exp \gamma\tau > 1$, więc nierówność (11) będzie prawdziwa, jeśli stałą C zastąpimy przez stałą $\bar{C} = C \exp \gamma\tau$

Wykażemy obecnie następujące

TWIERDZENIE 1. Zakładamy, że $\| B(t,x,\omega)\|$ jest ciągła względem t z prawdopodobieństwem 1 oraz, że spełnione jest założenie A.

Jeżeli

$$\sup_{t>t_o-\tau} \Big[R_o(t) + R_1(t)\Big] + \sup_{\omega, t>t_o-\tau} \| B(t,x,\omega) \| < \frac{\gamma}{\bar{C}},$$

to rozwiązanie trywialne równania (1) jest asymptotycznie stabilne w sensie definicji 1, a w przypadku słabej nierówności jest stabilne w tym samym sensie z prawdopodobieństwem jeden.

Uwaga: $\sup_{\omega} \|B(t,x,\omega)\|$ brane jest po pewnym zbiorze miary jeden.

D o w ó d. Zauważmy, że

$$\bar{C}\exp(-\gamma t)\int_{t_o-\tau}^{t_o}\exp\gamma t''\left[R_1(t''+\tau)+\|B(t''+\tau,x,\omega)\|\right]\|\varphi(t'',x)\|dt''$$

$$\leqslant \bar{C}\frac{\gamma}{\bar{C}}\sup_{t\in[t_o-\tau,t_o]}\|\varphi(t,x)\|M\exp(-\gamma t)\leqslant \bar{M}\sup_{t\in[t_o-\tau,t_o]}\|\varphi(t,x)\|\exp(-\gamma t),$$

gdzie:

$$M=\int_{t_o-\tau}^{t_o}\exp\gamma t''\,dt'';\quad \bar{M}=\bar{C}\frac{\gamma}{\bar{C}}M=\gamma M.$$

Mamy więc

$$\|u(x,t)\|\leqslant\bar{C}\exp-\gamma(t-t_o)\sup_{t\in[t_o-\tau,t_o]}\|\varphi(t,x)\|+$$

$$+\bar{M}\exp-\gamma(t-t_o)\sup_{t\in[t_o-\tau,t_o]}\|\varphi(t,x)\|\times$$

$$\times\frac{1}{\exp\gamma t_o}+\bar{C}\int_{t_o}^{t}\left[R_o(t'')+R_1(t''+\tau)+\right.$$

$$\left.+\|B(t''+\tau,x,\omega)\|\right]\|u(t'',x)\|dt'' \tag{12}$$

oraz

$$\|u(x,t)\|\leqslant\bar{\bar{C}}\exp-\gamma(t-t_o)\sup_{t\in[t_o-\tau,t_o]}\|\varphi(t,x)\|+$$

$$+\bar{C}\int_{t_o}^{t}R_o(t'')+R_1(t''+\tau)+$$

$$+\|B(t''+\tau,x,\omega)\|]\|u(t'',x)\|dt'', \tag{13}$$

gdzie:

$$\bar{\bar{C}}=\bar{C}+M/\exp\gamma t_o.$$

Wykorzystując obecnie uogólnioną nierówność Gronwalla-Bellmana, mamy

$$\|u(x,t)\| \leqslant \bar{\bar{C}} \sup_{t\in[t_o-\tau,t_o]} \|\varphi(t,x)\| \exp \bar{C}\,(t-t_o)\Big[-\frac{\gamma}{\bar{C}} +$$

$$+ \sup_{t>t_o-\tau}\Big[R_o(t) + R_1(t) + \sup_{\omega,t>t_o-\tau} \|B(t,x,\omega)\|\Big] \tag{14}$$

Z zależności (14) wynika natychmiast teza twierdzenia.
Wykorzystując (13) można udowodnić nieco inne kryterium stabilności.

TWIERDZENIE 2. Zakładamy, że spełnione jest założenie A. Jeżeli $[R_o(t) + R_1(t) + \|B(t,x,\omega)\|]$ jest ograniczona dla prawie każdego ω oraz $\lim_{t} [R_o(t) + R_1(t) + \|B(t,x,\omega)\|] < \frac{\gamma}{\bar{C}}$ dla prawie każdego ω, to rozwiązanie trywialne równania (1) jest asymptotycznie stabilne w sensie definicji 1 z prawdopodobieństwem jeden. Jeśli pozostawimy tylko drugi warunek, to jest stabilne w sensie Kozina z prawdopodobieństwem jeden.

D o w ó d. Zastosujemy do zależności (13) nierówność Gronwalla-Bellmana. Otrzymujemy:

$$\|u(t,x)\| \leqslant \bar{\bar{C}} \sup_{t\in[t_o-\tau,t_o]} \|\varphi(t,x)\| \exp\Big\{-\gamma(t-t_o) +$$

$$+ \bar{C}\int_{t_o}^{t} \big[R_o(t'') + R_1(t''+\tau) + \|B(t''+\tau,x,\omega)\|\big]\,dt''\Big\} \tag{15}$$

Stosując tw. de l'Hospitala mamy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{t_o}^{t} R_o(t'') + R_1(t''+\tau) + \|B(t''+\tau,x,\omega)\|\,dt''}{t-t_o} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\big[R_o(t) + R_1(t+\tau) + \|B(t+\tau,x,\omega)\|\big] < \frac{\gamma}{\bar{C}} \tag{16}$$

Z (16) wynika, że wybierając dostatecznie duże T, dla $t > T$ mamy

$$\int_{t_o}^{t} \big[R_o(t'') + R_1(t''+\tau) + \|B(t''+\tau,x,\omega)\|\big]\,dt'' < \frac{\gamma}{\bar{C}}\,\varepsilon(t-t_o),$$

gdzie ε dowolnie mała liczba dodatnia, mamy więc

$$\|u(x,t)\| \leqslant \bar{\bar{C}} \sup_{t\in[t_0-\tau,t_0]} \|\varphi(t,x)\| \exp(t-t_0)(-\gamma+\gamma\varepsilon) \quad \text{dla} \quad t > T \tag{17}$$

Ponieważ ε może być dowolnie małe, z (17) otrzymujemy natychmiast

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,x)\| = 0 \quad \text{z prawdopodobieństwem 1.}$$

Jeżeli natomiast w przedziale $[t_0,T]$ zgodnie z pierwszym założeniem $R_0(t) + R_1(t) + \|B(t,x,\omega)\|$ jest ograniczone, wtedy dla $t\in[t_0,T]$ mamy

$$\|u(t,x)\| \leqslant \bar{\bar{C}} \sup_{t\in[t_0-\tau,t_0]} \|\varphi(t,x)\| \exp -\gamma(t-t_0) \; x$$

$$x \exp \bar{C}\, T \sup_{t\in[t_0,T]} [R_0(t) + R_1(t+\tau) + \|B(t+\tau,x,\omega)\|] \tag{18}$$

Ostatni czynnik w iloczynie po prawej stronie (18) jest ograniczony z prawdopodobieństwem jeden. Z (17) i (18) wynika teza naszego twierdzenia, co kończy dowód.

III. Uwagi końcowe

Powyższe twierdzenia można przenieść na przypadek układów, w których zamiast opóźnienia τ wprowadzono pewną funkcję losową $f(\tau,\omega)$, o której zakłada się, że jej prawie wszystkie realizacje są nieujemne (lub dodatnie). Stan początkowy układu byłby wtedy wyznaczony poprzez funkcję $\varphi(t,x)$ określoną w $[t_0-\bar{\tau},\ t_0]$, gdzie

$$\bar{\tau} = \sup \; f(\tau,\omega)$$

Możliwe jest również przeniesienie na równania różniczkowo-całkowe z częścią całkową typu Fredholma i na równania całkowe z przesuniętym argumentem.

Wpłynęło do Redakcji w październiku 1974 r.

LITERATURA

[1] Tylikowski A.: "Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych". Zeszyt Naukowy Politechniki Śląskiej. Seria: Automatyka nr 20. Gliwice 1972.

[2] Wang P.K.C.: Asymptotic Stability of Distributed Parameter Systems with Feedback Contrils. IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AG 11 N 1, January 1966 pp 46-54.

[3] Skalmierski B., Tylikowski A.: "Stabilność układów dynamicznych". PWN Warszawa 1973.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРАХ НЕПРЕРАБНАХ СИСТЕМ С ЗАПАУДИВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Р е з ю м е

В этой работе мы исследуем устойчивость некоторых непрерывных систем с запаздывающим аргументом при случайных возмущениях. При помощи оператора семигруппа мы получаем несколько критерия для систем вида.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_o\, u(t,x) + B(t,x,\omega)\, u(t-\tau,x) + h(t,x,u(t,x),\, u(t-\tau,x)) +$$

$$+ F_o(t,x)\, u(t,x) + F_1(t,x)\, u(t-\tau,x)$$

где F_o, F_1 – ограниченные операторы.

ON THE STABILITY OF SOME CONTINUOUS SYSTEMS WITH TIME DELAY

S u m m a r y

In this paper some stability criterions for continuous systems with time delays are considered. We applied theory of semigroup operators to investigate asymptotical stability of dynamical systems of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_o\, u(t,x) + B(t,x,\omega)u(t-\tau,x) + h(t,x,u(t,x),u(t-\tau,x)) +$$

$$+ F_o(t,x)\, u(t,x) + F_1(t,x)\, u(t-\tau,x)$$

where F_o and F_1 are some bounded operators.