ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Danuta JAMA

O STABILNOŚCI PEWNYCH UKŁADÓW CIĄGŁYCH I MIESZANYCH

Streszczenie. W pracy dowodzę dwa twierdzenia dotyczące stabilności odpowiednich układów ciągłych i mieszanych, wykorzystując metody operatorów półgrupowych i zasady maksimum oraz podaję dwa przykłady ilustrujące te twierdzenia.

DEFINICJA 1. Rozwiązanie trywialne $u(x,t) \equiv 0$ poniższego układu jest stabilne wg dwóch norm $\|\circ\|_0$, $\|\bullet\|_1$ z prawdopodobieństwem 1, jeżeli

$$\bigwedge_{\omega} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi_0(x,\omega\|_0 < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t\geqslant 0} \|u(x,t)\|_1 < \varepsilon$$

DEFINICJA 2. Rozwiązanie trywialne $u(x,t) \equiv 0$ poniższego układu jest asymptotycznie stabilne wg dwóch norm z prawdopodobieństwem 1, jeżeli

$$\bigwedge_{\omega} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi_0(x,\omega)\|_0 < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|u(x,t)\|_1 = 0$$

I. Układy ciągłe

Rozważmy teraz układ postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_0 + B(t,x,\omega)u + h(t,x,u(t,x)) \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi_0(x,\omega) \prec Bu(t,x) = F(t,x,u) \quad \text{dla} \quad (t,x) \tag{2}$$

należących do brzegu, określony w pewnym obszarze walcowym $\Omega \times [OT]$, $T < \infty$, gdzie Ω jest pewnym obszarem przestrzeni E_n. L_0 jest $n \times n$ wymiarowym, macierzowym operatorem różniczkowym względem zmiennych przestrzennych $x = (x_1 \ldots x_n)$, $B(t,x,\omega)$ jest $n \times n$ wymiarową macierzą, ω - elementem pewnej przestrzeni probalistycznej, B pewien operator, F - operator ograniczony.

Zauważmy, że operator $F(t,x,.)$ odwzorowuje zbiór funkcji u określonych na zbiorze $\Omega \times [OT]$ w zbiór funkcji określonych tylko na brzegu, gdzie zbiór funkcji brzegowych jest podzbiorem pewnej unormowanej przestrzeni liniowej.

Przyjmujemy, że L_o przy zerowym warunku brzegowym jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów $\{\phi(t_1,t_2)\}$ (prace [1], [2]). Załóżmy, że dla operatora ϕ spełnione jest założenie

$$\bigvee_{C}\ \bigvee_{\gamma\geq 0} \|\phi(t,\tau)\| \leq (\exp(-\gamma(t-\tau)) \qquad t,\tau\in[0,\infty) \tag{3}$$

Wówczas istnieje macierz Greena $K(t,t',x,x')$, odpowiadająca układowi liniowemu

$$\frac{\partial u(t,u)}{\partial t} = L_o\, u \quad t > t_o,\ x\in\Omega \tag{4}$$

$$Bu(t,x) = \delta(t-t', x-x')I, \quad t > t_o,\ x\in\partial\Omega \tag{5}$$

i spełnia oszacowanie:

$$\Big\|\int_{\partial\Omega} K(t,t',\cdot,x')(\cdot)\, d(\partial\Omega)\Big\| =$$

$$= \sup \left\{ \Big\|\int_{\partial\Omega} K(t,t',\cdot,x')z(t',x')d\Omega\Big\| : \|z(t',\cdot)\| = 1 \right\} \leq \mathcal{L}_1 \exp(-\beta_1(t-t'))\quad \mathcal{L}_1,\beta_1 > 0 \tag{6}$$

δ - funkcja Diroca, I wektor jednostkowy, a rozwiązanie układu (1) - (2) spełnia równanie całkowe

$$u(t,x) = \phi(t,0)\varphi_o(x) + \int_0^t \phi(t,\tau)\, B(\tau,x,\omega)\, u(\tau,x)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \phi(t,\tau)\, h(t,x,u(t,x))d\tau + \int_0^t \left\{\int_{\partial\Omega} K(t,t',x,x')\, F(t',x',u)\, d(\partial\Omega)\right\} dt' \tag{7}$$

TWIERDZENIE 1. Niech będą spełnione założenia:

a) $\bigvee_{C}\ \bigvee_{\gamma>0} \|\phi(t,\tau)\| \leq C\exp(-\gamma(t-\tau)) \qquad \bigwedge_{t,\tau\in[0,\infty)}$

b) $\int_0^\infty \|B\|d\tau < \infty$ dla prawie każdego ω oraz $\|B\|$ jest ciągła $\bigwedge_{\omega}$

c) $\|h(t,x,u)\| \leq k(t,\omega)\,\|u\|$, gdzie $k(t,\omega)$ jest ciągła i całkowalna z prawdop. 1,

d) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|F\|_{\partial\Omega} < \frac{\gamma}{\alpha_1}$ oraz $\|F\|_{\partial\Omega}$ jest ciągła z prawdop. 1.

Wtedy rozwiązanie trywialne układu (1) - (2) jest asymptotycznie stabilne z prawdopodobieństwem jeden.

D o w ó d. Przechodząc w (7) do normy mamy

$$\|u\| \leqslant C\exp(-\gamma t)\|\varphi_0\| + C\int_0^t \|B\|\|u\|d\tau + C\int_0^t k(\tau,\omega)\|u\|d\tau$$

$$+\int_0^t \alpha_1 \exp(-\beta_1(t-\tau))\|F\|_{\partial\Omega}\|u\|d\tau \tag{8}$$

$$\|u\| \leqslant C\exp(-\gamma t)\|\varphi_0\| + C\int_0^t \Big[\|B\| +$$

$$+ k(\tau,\omega)\Big]\|u\|d\tau + \alpha_1\int_0^t \|F\|_{\partial\Omega}\|u\|\,d\tau \tag{9}$$

Wykorzystując nierówność Gronwallo-Bellmana otrzymujemy

$$\|u\| \leqslant C\|\varphi_0\|\exp\Big\{-\gamma t + C\int_0^t(\|B\| + k(\tau,\omega))d\tau + \alpha_1\int_0^t\|F\|_{\partial\Omega}\,d\tau\Big\}. \tag{10}$$

Z założenia c) i założeń a) i c) twierdzenia 1 wynika, że

$$\exp C\int_0^t\Big[\|B\| + k(\tau,\omega)\Big]d\tau < M < \infty \quad \text{dla prawie każdego } \omega, \tag{11}$$

a więc

$$\|u\| \leqslant C\|\varphi_0\|\exp t\,\alpha_1\Big\{-\frac{\gamma}{\alpha_1} + \frac{1}{t}\int_0^t\|F\|_{\partial\Omega}\,d\tau\Big\}M \tag{12}$$

dla dowolnego skończonego t wykładnik exp jest ograniczony oraz

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\|F\|_{\partial\Omega}\,d\tau - \frac{\gamma}{\alpha} < 0,$$

a więc

$$\lim_{t\to\infty} \|u\| = 0 \text{ z prawdop. } 1$$

Z powyższego wynika teza twierdzenia.

Przykład 1. Rozważmy układ dyfuzji postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (C_o + \eta(t,x,\omega)\, u(t,x) + h(t,x,u(t,x)) \tag{13}$$

z warunkami brzegowymi:

$$\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - r(t,x)\right)\Big|_{x=0} = -r\int_0^1 Q(t,x,\omega)\, u(t,x)dx \tag{14}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0 \tag{15}$$

r - jest stałą dodatnią.

Można pokazać, że:

$$\phi(t,t') = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\lambda_n\cos\lambda_n x+\sin\lambda_n x)(\lambda_n\cos\lambda_n x'+\sin\lambda_n x')}{\lambda_n^2 + r^2 + r} e^{-(\lambda_n^2-C_o)(t-t')}(.)dx'$$

$$\text{i} \quad K(t,t',x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos\lambda_n(1-x) \Big/ (r^{-1}+(1+r)\lambda_n^{-2})\cos^2\lambda_n \cdot e^{-(\lambda_n^2-C_o)(t-t')}$$

gdzie λ_n są dodatnimi pierwiastkami równania $\lambda_n \tan \lambda_n = r$. Jako normę $\|u\| = (\int_0^1 u^2 dx)^{1/2}$. Łatwo widzieć, że są spełnione założenia twierdzenia 1. Część nierówności (9) zawierającą funkcję Greena oznaczymy przez u_b i wykorzystując nierówność Schwarza oszacujemy bezpośrednio:

$$\|u_b(t,x)\| < \int_0^t \Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(r^{-1}+(1+r)\lambda_n^{-2})\cos^2\lambda_n}\Big) e^{-(\lambda_{min}^2 - C_o)(t-t')}$$

$$\Big(\int_0^1 |Q(t',x,\omega)^2 dx\Big)^{1/2} \|u(t',x)\|\Big] dt' .$$

W dalszych rozważaniach rolę $\|F\|_{\partial\Omega}$ spełni $\left(\int_0^1 |Q(t,x,\omega)|^2 dx\right)^{1/2}$

$$C = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\lambda_n^2 + 1)^2}{\lambda_n^2 + r^2 +}\Big)^{1/2} \qquad \gamma = \lambda_{min}^2 - C_o \qquad \beta = \lambda_{min}^2 - C_o$$

$$L_1 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(r^{-1} + (1+r)\lambda_n^{-2})\cos^2\lambda_n}\Big)^{1/2}$$

gdzie:

$$\lambda_{min} = \min \{\lambda_n\}$$

oraz aby teza twierdzenia mogła być spełniona musi być $\lambda_{min}^2 - C_o > 0$.

Mając powyższe dane i przy spełnieniu pozostałych założeń twierdzenia łatwo ustalić warunek stabilności dla rozważanego układu.

II. Układy mieszane

Rozważmy układ postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_o + B(t,x,\omega))\, u + h(x)\, \zeta(t,\omega) \tag{16}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = A\zeta + f(t,\zeta,\omega) + \frac{1}{\mathrm{mes}\,\Omega} \int_{\Omega} K(t,x,\omega)\, u(t,x) dx \tag{17}$$

z zerowym warunkiem brzegowym dla (16) i odpowiednimi warunkami początkowymi.

TWIERDZENIE 2. Niech macierz o stałych współczynnikach A w (17) generuje $X(t,\tau)$ spełniająca oszacowanie $\|X(t,\tau)\|^* \leq C_1 \exp(-\beta(t-\tau))$ oraz $|f(t,\xi,\omega)| \leq L(\tau,\omega)\,|\xi(t,\omega)|$, $\|X(t,\tau)\|^*$ jest generowana przez $|\cdot|$. Dla równania (16) niech będą spełnione założenia (a) i (b) Twierdzenia 1. $h(x)$ jest funkcją skalarną o ograniczonej normie oraz $L(t,\omega)$ jest ciągła i całkowalna z prawdop. 1, a $\sup\limits_{t>0} \|K\| < \infty$

Wtedy rozwiązanie trywialne (16) - (17) jest stabilne w normie

$$\|u,\xi\| = \sup_t \|u\| + \sup_t |\xi(t,\omega)|$$

z prawdopod. 1 o ile $1 - C\int_0^t \|B\| - \frac{C}{\gamma}\frac{\bar{\bar{C}}}{\beta}\|h\| \sup\limits_{t>0}\|K\| > 0.$

D o w ó d. Równaniu (17) można nadać postać całkową

$$\xi = X(t,0)\xi(0,\omega) + \int_0^t X(t,\tau)\, f(\tau,\xi,\omega)d\tau +$$

$$+ \int_0^t X(t,\tau)\left[\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int_\Omega K(\tau,x,\omega)\, u(\tau,x)du\right]d\tau \tag{18}$$

Przechodząc w nim do normy mamy

$$\|\xi\| = C_1|\xi| \leq C_1\left\{\bar{C}_1\exp(-\beta t)|\xi(0,\omega)| + \bar{C}_1\int_0^t L(\tau,\omega)\,|\xi(\tau,\omega)|\,d\tau\right\}$$

$$+ \bar{C}_1\int_0^t \exp(-\beta(t-\tau))\|K(\tau,x,\omega)\|\,\|u(\tau,x)\|\,d\tau \tag{19}$$

$$\|\xi\| = C_1|\xi| \leq \Big[C_1\bar{C}_1\exp(-\beta t)|\xi(0,\omega)| +$$

$$+ C_1\bar{C}_1\int_0^t \exp(-\beta(t-\tau))\,\|K\|\,\|u\|d\tau\Big]\exp C_1\bar{C}_1\int_0^t L(\tau,\omega)d\tau$$

$$\|\xi\| \leq \bar{\bar{C}}\left[|\xi(0,\omega)\exp(-\beta t) + \int_0^t \exp(-\beta(t-\tau))\,\|K\|\|u\|\,d\tau\right] \tag{20}$$

$$\bar{\bar{C}} = \max_t \left[C_1\bar{C}_1 \exp C_1\bar{C}_1 \int_0^t L(\tau,\omega)d\tau;\ \ \bar{C}_1 \exp C_1\tilde{C}_1 \int_0^t L(\tau,\omega)d\tau \right].$$

Z kolei wykorzystując operator ϕ zamieniamy (16) na równanie całkowe i przechodząc do normy otrzymujemy

$$\|u\| \leqslant \|\phi(t,0)\| \|\varphi_0\| + \int_0^t \|\phi(t,\tau)\| \|B\| \|u\| d\tau +$$

$$+ \int_0^t \|\phi(t,\tau)\| \|h\| \|\xi\| d\tau \leqslant C\exp(-\gamma t)\|\varphi_0\| + C\int_0^t \|B\| \|u\| d\tau +$$

$$+ C\int_0^t \exp(-\gamma(t-\tau))\ \bar{\bar{C}} \left[|\xi(0,\omega)| + \int_0^t \exp(-\gamma(t-\tau)) \|K\| \|u\| \right] d\tau \tag{21}$$

Z (21) otrzymujemy:

$$\|u\| \leqslant C\|\varphi_0\| + C \sup_{t>0} \|u\| \int_0^t \|\beta\| d\tau + C\bar{\bar{C}}\|h\| \frac{1}{\gamma} |\xi(0,\omega)| +$$

$$+ \frac{C}{\gamma}\frac{\bar{\bar{C}}}{\beta} \|h\| \sup_{t>0} \|K\| \sup_{t>0} \|u\|, \tag{22}$$

a więc

$$\sup_{t>0} \|u\| \left(1 - C\int_0^t \|\beta\| d\tau - \frac{C}{\gamma}\frac{\bar{\bar{C}}}{\beta} \|h\| \sup_{t>0} \|K\|\right) \leqslant$$

$$C\|\varphi_0\| + C\,\bar{\bar{C}}\,\frac{1}{\gamma} |\xi(0,\omega)|\ \|h\|, \tag{23}$$

zatem $\sup \|u\|$ jest małe o ile $\|\varphi_0\|$ i $|\xi(0,\omega)|$ są małe. Ale z (20) wynika natychmiast, że

$$\|\xi\| \leqslant \bar{C}\left(|\xi(0,\omega)| + \sup_{t>0} \|K\| \sup_{t>0} \|u\| \frac{1}{\beta}\right), \tag{24}$$

a więc podobny warunek zachodzi i dla $\|\xi\| = C|\xi|$

Przyjmując jako normę wektora

$$\|(u,\xi)\| = \sup_{t>0}\|u\| + \sup_{t>0}|\xi(t,\omega)$$

i

$$\|(\varphi_0, |\xi(0,\omega)|)\| = \sup_{\omega}(\|\varphi_0\| + |\xi(0,\omega)| \tag{25}$$

otrzymamy tezę twierdzenia.

Przykład 2. Rozważmy układ postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_0(t,x,\omega)\, u \tag{26}$$

$$u(0,x,\omega) = \varphi_0(x,\omega) \quad u(t,x,\omega)\Big|_{(t,x)\in\partial\Omega\times[0,D)} = h(x)\,.\,\xi(t,\omega) \tag{27}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t,\xi,\omega) + \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(t,x)\, K(x)dx \tag{28}$$

Przyjmujemy, że dla każdego operatora $\frac{\partial}{\partial t} - L_0(t,x,\omega)$ słuszna jest zmodyfikowana zasada maximum w sensie dla prawie każdego ω, tzn. dla pewnego zbioru miary jeden i dla $\omega \in \mathfrak{M}$ mamy:

$$\max_{\substack{t>0\\ x\in\Omega}}|u(t,x)| \leqslant \max_{x\in\bar{\Omega}}|\varphi_0(x,\omega)|$$

lub

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}|u(t,x)| \leqslant \max_{x\in\bar{\Omega}}|h(x)|\,|\xi(t, \ )|$$

Niech $f(t,\xi,\omega)$ spełnia uogólniony warunek Lipschitza

$$f(t,\xi_1,\omega) - f(t,\xi_2,\omega)| \leqslant L(t,\omega)|\xi_1-\xi_2|$$

oraz $(f,0,\omega) \equiv 0$, $|\cdot|$ jest normą eutlidesową w przestrzeni eutlidesowej. ξ jest pewnym n-wymiarowym wektorem, $h(x)$ jest wektorem wierszowym n-wymiarowym, $K(x)$ jest n-wymiarowym wektorem kolumnowym, $h(x)\,.\,\xi(t,\omega)$ cznacza iloczyn skalarny w R^n, $u(t,x)\,K(x)$ oznacza mnożenie wektora funkcyjnego przez funkcję skalarną.

Przypuśćmy, że zachodzi pierwszy człon alternatywy, tzn.

$$\max_{x\in\Omega}|u(t,x)| \leqslant \max_{x\in\bar{\Omega}}|\varphi_0(x,\omega)| \tag{29}$$

Scałkujemy (28) w przedziale od $[0,t]$ i przychodząc do normy $|\cdot|$ otrzymujemy:

$$|\xi(t,\omega)| \leqslant |\xi(0,\omega)| + \int_0^t L(\tau,\omega)\,|\xi(\tau,\omega)|\,d\tau + \frac{1}{\text{mes}\,\Omega}$$

$$\int_\Omega |K(x)|\,|u(t,x)|\,dx - \frac{1}{\text{mes}\,\Omega}\int_\Omega |K(x)|\,|\varphi_0(x,\omega)\,dx \tag{30}$$

$$|\xi(t,\omega)| \leqslant |\xi(0,\omega)| + \int_0^t L(\tau,\omega)|\xi(\tau,\omega)|\,d\tau + 2\max_{x\in\Omega}|K(x)|\,\cdot$$

$$\max_{x\in\Omega}|\varphi_0(x,\omega) \tag{31}$$

Wykorzystując nierówność Gronwallo-Bellmana mamy

$$|\xi(t,\omega)| \leqslant \left[|\xi(0,\omega)| + 2\max_{x\in\Omega}|K(x)|\ \max_x|\varphi_0(x,\omega)|\right]\cdot \exp\int_0^t L(\tau,\omega)\,d\tau \tag{32}$$

A więc jeżeli wprowadzimy normę wektora (u,ξ) wzorem

$$\|(u,\xi)\| = \max_x|u(t,x)| + |\xi(t,\omega)|$$

otrzymujemy z (31)

$$\|(u,\xi)\| = \max_x|u(t,x,\omega)| + |\xi(t,\omega)| \leqslant \max_{x\in\Omega}|\varphi_0(x,\omega) +$$

$$\left[|\varphi(0,\omega)| + 2\max_{x\in\Omega}|K(x)\ \max_x|\varphi_0(x,\omega)|\right]\ \exp\int_0^t L(\tau,\omega)\,d\tau$$

ponieważ $\exp\int_0^t L(\tau,\omega)\,d\tau$ zgodnie z założeniami twierdzenia 1 jest ograniczony, zatem

$$\sup_{\omega\in\mathfrak{M}}\exp\int_0^t L(\tau,\omega)\,d\tau < Z_1 < \infty$$

a więc z powyższego wynika stabilność rozwiązania trywialnego w wypadku gdy $\max_{x\in\Omega}|K(x)| < \infty$

Przypuśćmy, że słuszny jest drugi człon alternatywy, tzn.

$$\max_{x\in\bar\Omega} |u| \leqslant \max_{x\in\bar\Omega} |h(x)|\,|\zeta(t,\omega)| .$$

Mamy wtedy w (31)

$$|\zeta(t,\omega)| \leqslant |\zeta(0,\omega)| + \int_0^t L(\tau,\omega)\,|\zeta(\tau,\omega)|d\tau +$$

$$+ \max_{x\in\bar\Omega}|K(x)| \max_{x\in\bar\Omega}|h(x)|\,|\zeta(t,\omega)| + \max_{x\in\Omega}|K(x)| \max_{x\in\Omega}|\varphi_0(x,\omega)|$$

$$|\zeta(t,\omega)|\,(1-\max_{x\in\bar\Omega}|K(x)| \max_{x\in\bar\Omega}|h(x)|) \leqslant |\zeta(0,\omega)| + \max_{x\in\Omega}|K(x)| .$$

$$\max_{x\in\Omega}|\varphi_0(x,\omega)| + \int_0^t L(\tau,\omega)\,|\zeta(\tau,\omega)d\tau \tag{33}$$

Niech $1 - \max|K(x)|\max_{x\in\bar\Omega}|h(x)| = Z > 0$ i oznaczmy $\bar Z = \frac{1}{Z}$.
Wykorzystując analogiczne rozważania jak poprzednio, otrzymujemy

$$|\varphi(t,\omega)| \leqslant \bar Z\, Z_1 \Big[|\zeta(0,\omega)| + \max_{x\in\bar\Omega}|K(x)| \max_{x\in\bar\Omega}|\varphi_0(x,\omega) \tag{34}$$

$$\max_{x\in\Omega} u(t,x,\omega)| \leqslant \max_{x\in\bar\Omega}|K(x)|\,|\zeta(t,\omega)| < \max_{x\in\bar\Omega}|h(x)|Z\, Z_1\Big[\zeta(0,\omega)| +$$

$$+ \max_{x\in\bar\Omega}|K(x)|\max_{x\in\bar\Omega}|\varphi_0(x,\omega)|\Big] \tag{35}$$

Z (34) i (35) wynika, że układ wyjściowy jest stabilny, jeżeli spełniony jest warunek

$$1 - \max_{x\in\bar\Omega}|K(x)|\max_{x\in\bar\Omega}|h(x)| > 0 \quad \text{oraz} \quad \max_{x\in\bar\Omega}|h(x)| < \infty \quad \text{i} \quad \max_{x\in\bar\Omega}|K(x)| < \infty \tag{36}$$

przy czym stabilność jest słuszna z prawdop. jeden.

III. Uwagi końcowe

W pracy rozważałam wyłącznie stabilność z prawdop. jeden i dla uzyskania takich warunków stabilności ustalane były założenia. Przy niewielkich zmianach założeń można otrzymać stabilność wg średniej, względnie lokalną stabilność stochastyczną. Osłabienia założeń w tym ostatnim przypadku są niewielkie.

Wpłynęło do Redakcji w październiku 1974 r.

LITERATURA

[1] Tylikowski A.: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych. Zeszyt Naukowy Politechniki Śląskiej. Automatyka 20, Gliwice 1972.

[2] Wang P.K.C.: Asymystotic Stability of Distributed Parameter Systems nith. Feedbach Controls-IEEE Transactions On Automatic Control Val. A 6-11-No1. January 1966 pp. 46-54.

[3] Wang P.K.C.: Control of distributed parameter systems in A dwances in Control Systems vo. 1. C.T. Leondes, Ed. New York: Academie, 1964 pp. 75-172.

О СТАБИЛЬНОСТИ ОПРЕДЕЛЁННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ
И СМЕШВННЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе доказано два определения по стабкльности соответствующих непрерывных и смешанных систем, используя методы полугрупповых операторов и принципы максимум, а также подано два примера иллюстрирующие эти определения.

STABILITY OF SOME CONTINUOUS AND MIXED SYSTEMS

S u m m a r y

In my work I am prowing two statemerts concermed with the stability of contiruous or mixed systems, respectively, applying the method of sub-grup operators and the thearem of maximum. I am giving two examples illustrating these statements.