ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Danuta JAMA, Adam CZECH

ZASTOSOWANIE METOD LAPUNOWA-MOWCZANA DO BADANIA STABILNOŚCI ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH

Streszczenie. W pracy uogólniamy metody Mowczana badania stabilności na niejednorodne zdeterminowane zagadnienia brzegowe.
Wprowadzamy nową definicję stabilności. Podajemy cztery twierdzenia dotyczące stabilności oraz asymptotycznej stabilności rozwiązań pewnych układów ciągłych i mieszanych przy niejednorodnych zdeterminowanych warunkach brzegowych.

I. Będziemy badać stabilność zagadnień postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(t,x,u) \tag{1}$$

$$u(t,x)|_\Gamma = \varphi(t,x)|_\Gamma , \tag{2}$$

gdzie układ (1) - (2) jest określony w pewnym zbiorze $Q_T = \Omega x(0,T)$ (T może być dowolnie dużą liczbą); Ω jest pewnym zbiorem spójnym i otwartym w przestrzeni zmiennych $(x_1 \dots x_n)$, $\Gamma = \bar{Q}_T \setminus Q_T \cup \bar{\Omega}$. W całej pracy przyjmujemy, że badane rozwiązania są ograniczone w następującym sensie: istnieje stała $R > 0$ taka, że $u(t,x) \leq R$ dla $x \in \bar{\Omega}$ i $t \in [oT]$.
Wprowadźmy następujące definicje:

DEFINICJA 1. Mówimy, że rozwiązanie trywialne układu 1-2 jest stabilne względem warunków brzegowych, jeżeli:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi(t,x)\|_o < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t\in[0,T]} \|u(t,x)\|_1 < \varepsilon$$

Norma $\|\circ\|_1$ jest funkcją zależną od czasu, norma $\|\circ\|_o$ od czasu nie zależy.

Zakładamy, że pomiędzy normami $\|\circ\|_o$ i $\|\circ\|_1$ zachodzi związek: jeżeli

$$\|\circ\|_o = 0 \Rightarrow \bigwedge_{t\in[0,T]} \|\circ\|_1 = 0$$

DEFINICJA 2. Mówimy, że funkcjonał $f(t,u)$ jest dodatnio określony względem normy $\|\circ\|_1$ jeżeli:

$$f(t,u) \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{0<\gamma\leqslant R} \bigvee_{\mu(\gamma)} \|u\|_1 \geqslant \gamma \Rightarrow f(t,u) \geqslant \mu(\gamma)$$

DEFINICJA 3. Mówimy, że funkcjonał $f(t,u)$ jest ciągły względem normy $\|\circ\|_0$ na zbiorze $T_0 = [0,T]$ jeżeli

$$\bigwedge_{t\in T_0} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi(t,x)\|_0 < \delta \Rightarrow f(t,u) < \varepsilon$$

TWIERDZENIE 1. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby rozwiązanie trywialne układu (1) - (2) było stabilne w sensie def. 1 jest, aby wzdłuż rozwiązań tego układu istniał dodatnio określony względem normy $\|\circ\|_1$ i ciągły względem normy $\|\circ\|_0$ na zbiorze $T_0 = [0,T]$ funkcjonał $f(t,u)$.

D o w ó d k o n i e c z n o ś c i. R ustalamy jak powyżej. Niech

$$f(t,u) = \sup_{\tau\geqslant t} \|u(\tau,x)\|_1 .$$

Oczywiście $0 \leqslant f(t,u) \leqslant R$ i $f(t,u) \geqslant \|u(t,x)\|_1$, a więc $f(t,u)$ jest funkcjonałem dodatnio określonym względem normy $\|\circ\|_1$ z $\mu = \gamma$
Funkcjonał ten jest nierosnący względem t:
dla

$$t_1 < t_2 \quad f(t_1,u) = \sup_{\tau\geqslant t_1} \|u(\tau,x)\|_1 \geqslant \sup_{\tau\geqslant t_2} \|u(\tau,x)\|_1 = f(t_2,u).$$

Z warunków stabilności mamy:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi(t,x)\| < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t\in[0,T]} \|u(t,x)\|_1 < \varepsilon$$

a więc

$$\bigwedge_{t\in T_0} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi(t,x)\|_0 < \delta \Rightarrow f(t,u) < \varepsilon$$

czyli nasz funkcjonał jest również ciągły względem normy $\|\circ\|_0$ na zbiorze T_0.

D o w ó d dostateczności. Przypuśćmy, że układ jest niestabilny tzn.:

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \left[\|\varphi(t,x)\|_0 < \delta \ \wedge \bigvee_{t\in[0,T]} \|u(t,x)\|_1 > \varepsilon \right]$$

mimo, że istnieje funkcjonał $f(t,u)$ dodatnio określony względem normy $\|\circ\|_1$ i ciągły względem normy $\|\circ\|_0$ na zbiorze $T_0 = [0,T]$.

Z warunku ciągłości funkcjonału $f(t,u)$ dla każdego $t \in T_0$ i dla każdego $\varepsilon_1 > 0$ można dobrać δ, aby

$$\|\varphi(t,x)\|_0 < \delta \Rightarrow f(t,u) < \varepsilon_1,$$

ale z kolei z dodatniej określoności $f(t,u)$ wynika, że jeśli

$$\|u(t,x)\|_1 \geqslant \varepsilon \Rightarrow f(t,u) \geqslant \mu(\varepsilon).$$

Wybierając $\varepsilon_1 < \mu(\varepsilon)$ otrzymamy sprzeczność.

Uwaga 1. Niech warunek brzegowy $\varphi(t,x)$ jest nierosnący względem normy $\|\circ\|_0$, tzn. przy $t_2 > t_1$ $\|\varphi(t_1,x)\|_0 \geqslant \|\varphi(t_2,x)\|_0$ i ograniczony, wówczas w twierdzeniu 1 wystarczy założyć ciągłość funkcjonału względem normy $\|\circ\|_0$ przy $t = 0$ tzn.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi(0,X)\|_0 < \delta \Rightarrow f(0,u_0) < \varepsilon$$

Istotnie, $\|\varphi(t,x)\|_0 \leqslant \|\varphi(0,X)\|_0$ i $f(t,u) \leqslant f(0,u_0)$ co daje tezę naszej uwagi.

TWIERDZENIE 2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układ (1) - (2) był asymptotycznie stabilny względem normy $\|\circ\|_0$ jest, aby były spełnione założenia twierdzenia 1 oraz dodatkowy warunek

$$\lim_{t\to\infty} f(t,u) = 0$$

D o w ó d. Stabilność układu jest zapewniona przez warunki twierdzenia 1. Warunek, że $\lim_{t\to\infty} f(t,u) = 0$ biorąc pod uwagę to, że funkcjonał jest dodatnio określony powoduje, że $\lim_{t\to\infty} \|u\|_1 = 0$. W przeciwnym przypadku wartość funkcjonału w nieskończoności musiałaby być dodatnia. Konieczność wynika z określenia funkcjonału w twierdzeniu 1.

II. Rozpatrzmy zadanie mieszane postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(t,x,u) \tag{3}$$

$$u(0,x) = \varphi_0(x) \quad u(t,x)\big|_{\Gamma} = \varphi(t,x)\big|_{\Gamma} \quad \varphi(0,x)\big|_{\Gamma} = \varphi_0(x), \tag{4}$$

gdzie Γ' jest brzegiem obszaru Ω .
Będziemy badać stabilność układu (3) - (4) w sensie następującej definicji

DEFINICJA 4. Mówimy, że rozwiązanie trywialne układu (3) - (4) jest stabilne względem warunków początkowych i brzegowych jeżeli:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \|\varphi_0(x)\|_0 + \|\varphi(t,x)\|_1 < \delta \Rightarrow \bigwedge_{t\in[0T]} \|u(t,x)\|_2 < \varepsilon$$

W poniżej sformułowanym twierdzeniu przyjmujemy szczególną postać normy $\|\circ\|_1 = \sup_{(t,x)\in\Gamma} |\varphi(t,x)|$.

TWIERDZENIE 3. Jeżeli istnieje funkcjonał $f_0(t,u)$ określony na rozwiązaniach układu (3) - (4), dodatnio określony względem normy $\|\circ\|_2$, posiadający wzdłuż dowolnego rozwiązania pochodną $\frac{df_0}{dt} \leqslant 0$ i ciągły względem norm $\|\circ\|_0$ i $\|\circ\|_1$ w punkcie $t = 0$, to rozwiązanie trywialne układu (3) - (4) jest stabilne w sensie definicji 4.

D o w ó d. Utwórzmy wyrażenie

$$f_1(t,u,\varphi) = f_0(t,u) + |\varphi(t,x)|, \tag{5}$$

ponieważ

$$\frac{df_0}{dt} \leqslant 0,$$

więc

$$\frac{df_1}{dt} \leqslant \frac{d|\varphi|}{dt} \tag{6}$$

$$f_1(t,u,\varphi) \leqslant f_0(0,u_0) + |\varphi(t,x)| \tag{7}$$

z dodatniej określoności funkcjonału $f_0(t,u)$ względem normy $\|\circ\|_2$ wynika dodatnia określoność funkcjonału $f_1(t,u,\varphi)$. Funkcjonał $f_1(t,u,\varphi)$ jest również ciągły dla dowolnego $t\in[0T]$ względem norm $\|\circ\|_0$ i $\|\circ\|_1$.

Rzeczywiście, z (7) wynika, że

$$f_1(t,u,\varphi) \leqslant f_0(0,u_0) + \|\varphi(t,x)\|_1, \tag{8}$$

$f_0(0,u_0)$ jest funkcjonałem ciągłym względem $\|\circ\|_0$ i $\|\circ\|_1$.
Dla dowolnego $t \in [0,T]$ i $\varepsilon>0$ wybieramy więc takie δ, aby

$$\|\varphi_0(x)\|_0 + \|\varphi(t,x)\|_1 < \delta \quad \text{i aby} \quad f_0(0,u_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Bez zmniejszenia ogólności można przyjąć $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Mamy wtedy:

$$f_1(t,u,\varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

ponieważ oczywiście

$$\|\varphi(t,x)\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Można teraz dla otrzymania tezy zastosować rozważania analogiczne jak w dowodzie dostateczności w twierdzeniu 1.

Warunek stabilności można również sformułować w następującej postaci:

TWIERDZENIE 4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby rozwiązanie trywialne układu (3) - (4) było stabilne w sensie definicji 4 jest istnienie dodatnio określonego względem normy funkcjonału $f(x,t)$, spełniającego warunek

$$\bigwedge_{t\in[0T]} \|u(t,x)\|_2 \leqslant f(t,u) \leqslant C\left[\|\varphi_0(x)\|_0 + \|\varphi(t,x)\|_1\right] \tag{10}$$

C - dowolna stała.

D o w ó d. Dostateczność warunku jest natychmiastowa w oparciu o twierdzenie 1.

Warunek (10) jest równoważny ciągłości funkcjonału względem norm $\|\circ\|_0$ i $\|\circ\|_1$ w tym sensie, że z niego wynika ciągłość funkcjonału względem $\|\circ\|_0$ $\|\circ\|_1$. Dowód konieczności można przeprowadzić metodą nie wprost podobnie jak w twierdzeniu 1.

Wpłynęło do Redakcji w październiku 1974 r.

LITERATURA

[1] Skalmierski B., Tylikowski A.: Stabilność układów dynamicznych PWN, Warszawa 1973.

[2] Мовчан А.А.: О прямом методе Ляпунова в задачах устоичивости упругих систем, Прикл. Мат. Мех., Т. 23 1959 , Но 3 483-493.

[3] Зубов В.И.: Методы А.М. Ляпунова и их применение, Изд-во Лен. Ун-та, Ленинград 1957.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОД ЛАПУНОВА-МОВЧАНА
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАБИЛЬНОСТИ ГРАНИЧНЫХ ВОПРОСОВ

Р е з ю м е

В работе обобщено методы Мовчана по исследованию стабильности для неоднородно детерминированых граничных вопросов.

Введено новое определение стабильности. Подано 4 определения по стабильности и асимптотичной стабильности решений определенных непрерывных систем и смешанных систем при неоднородных детерминированных граничных условиях, а также подано определение по однозначительности решений системы.

APPLICATIONS OF THE LAPONOV-MOWCZAN'S METHODS TO THE
INVESTIGATIONS OF THE STABILITY OF BOUNDARY PROBLEMS

S u m m a r y

In my work I am generalizing Mowczan's metods of stability investigations with the heterogeneons, determinate, boundary problems.

I introduce a new definition of stability. I am giving 4 statements concerned with stability and asymptotic stability of solutions.