ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Stanisław KOWALIK

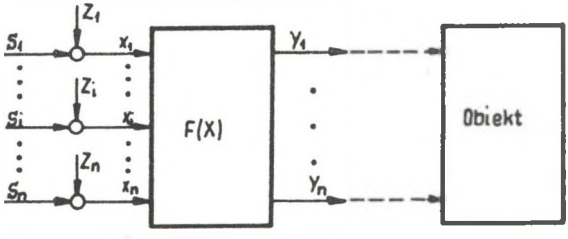
Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej

MINIMALIZACJA WPŁYWU ZAKŁÓCEŃ PRZEZ DOBÓR ODPOWIEDNICH WSPÓŁCZYNNIKÓW NA WEJŚCIU UKŁADU

Streszczenie. W pracy podano sposób na znalezienie współczynników na wejściu układu, które minimalizują wpływ zakłóceń. Rozważania przeprowadzono w oparciu o liniową estymację średniokwadratową. Przyjęto, że przebiegi sygnałów są procesami stochastycznymi stacjonarnymi. Podano także wzory na obliczenie błędu tej estymacji.

Wstęp

Rozważania w pracy dotyczą problemu, gdy chcemy uzyskać możliwie dokładnie oszacowanie sygnałów wejściowych pewnego obiektu sterowania, które uprzednio zostały zniekształcone przez zakłócenia. Uzyskane w wyniku filtracji sygnały będzie można dopiero wprowadzić na wejście obiektu. Wszystkie sygnały i zakłócenia będziemy traktowali jako procesy stochastyczne. Rozważania ograniczymy do procesów stochastycznych stacjonarnych. Dla wygody używać będziemy w zapisie procesu stochastycznego jednej litery ze wskaźnikiem np. x_i zamiast $x_i(t)$. Gdy zajdzie konieczność napisania wartości sygnału w konkretnej chwili, to zaznaczymy np. $x_i(t_1)$. Sytuacja o której mówimy przedstawiona jest na rysunku 1.



Rys. 1

$S_1,\ldots,S_n$ - sygnały niezakłócone, $Z_1,\ldots,Z_n$ - zakłócenia, $x_1,\ldots,x_n$ - sygnały zniekształcone, $Y_1,\ldots,Y_n$ - estymatory sygnałów $S_1,\ldots,S_n$

Przekształcenie F przyjmujemy w postaci

$$F(X) = AX + B, \tag{1}$$

gdzie:

$$X = (x_1, \ldots\ldots, x_n)^T$$

$A = \{a_{ik}\}$ jest macierzą współczynników o wymiarze nxn

$B = \{b_j\}$ jest wektorem współczynników o wymiarze nx1

Naszym celem jest znalezienie elementów macierzy A i wektora B, aby błąd

$$e_i = E\left\{(S_i - Y_i)^2\right\}$$

był najmniejszy (E ozn. wartość oczekiwaną).

W pracy tej rozważymy cztery rodzaje przekształcenia F, podamy sposób obliczenia współczynników i wzory na obliczenie błędu.

I. Ogólne rozwiązanie problemu, gdy przekształcenie F ma postać wzoru (1) F(X) = AX+B

Naszym zadaniem jest zminimalizować wyrażenie (1)

$$e_i = E\left\{(S_i - Y_i)^2\right\} \tag{2}$$

Wielkość Y_i na podstawie wzoru (1) możemy zapisać w postaci

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i$$

Przekształcając wzór (2) otrzymujemy

$$e_i = E\left\{(S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - b_i)^2\right\} = E\left\{(S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k)^2 - \right.$$

$$\left. - 2(S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k(b_i + b_i^2\right\}$$

Obliczamy pochodną tego wyrażenia ze względu na b:

$$\frac{\partial e_i}{\partial b_i} = -2E\left\{S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right\} + 2b_i$$

Po przyrównaniu pochodnej do zera otrzymujemy

$$b_i = E\left\{S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right\} = E\left\{S_i\right\} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}E\left\{x_k\right\}$$

Podstawiając (3) do (2) mamy

$$e_i = E\left\{(S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - E\left\{S_i\right\} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, E\left\{x_k\right\})^2\right\} =$$

$$= E\left\{\left[S_i - E\left\{S_i\right\} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - E\left\{x_k\right\})\right]^2\right\}$$

Dla ustalonego i obliczamy pochodną e_i ze względu na a_{ik}

$$\frac{\partial e_i}{\partial a_{ik}} = -2\,E\left\{\left[S_i - E\left\{S_i\right\} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - E\left\{x_j\right\})\right](x_k - E\left\{x_k\right\})\right\}$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymujemy

$$E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})(x_k - E\left\{x_k\right\})\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, E\left\{(x_j - E\left\{x_j\right\}) \cdot (x_k - E\left\{x_k\right\})\right\} \tag{4}$$

Korzystając ze wzoru na kowariancję procesów stacjonarnych [1]

$$C_{xy}(\tau) = E\left\{\left[x(t+\tau) - \eta_x\right]\left[y(t) - \eta_y\right]\right\},$$

gdzie η_x, η_y oznaczają wartości średnie procesów $x(t)$, $y(t)$, zapisujemy równania (4) w postaci

$$C_{s_i x_k}(0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{x_j x_k}(0) \tag{5}$$

Dla ustalonego i (5) przedstawia układ n $(k = 1,\ldots\ldots,n)$ równań o n $(j = 1,\ldots\ldots,n)$ niewiadomych a_{ij}.
Rozwiązując te układy równań dla każdego i otrzymujemy wszystkie współczynniki a_{ij}. Współczynniki b_i obliczamy z zależności (3).
Błąd przy takim doborze współczynników wyniesie

$$e_i = E\left\{(S_i - Y_i)^2\right\} = E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})^2\right\} - 2\sum_{k=1}^{n} a_{ik} E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\}) \cdot (x_k - E\left\{x_k\right\})\right\} + E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - E\left\{x_k\right\})\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})^2\right\} - 2\sum_{k=1}^{n} a_{ik} E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})(x_k - E\left\{x_k\right\})\right\} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E\left\{(x_j - E\left\{x_j\right\})(x_k - E\left\{x_k\right\})\right\}$$

Korzystając z zależności (4) otrzymujemy

$$e_i = E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})^2\right\} - 2\sum_{k=1}^{n} a_{ik} E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})(x_k - E\left\{x_k\right\})\right\} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})(x_k - E\left\{x_k\right\})\right\} = E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})^2\right\} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E\left\{(S_i - E\left\{S_i\right\})(x_k - E\left\{x_k\right\})\right\} =$$

$$= \sigma^2_{S_i}(0) - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{S_i x_k}(0)$$

Minimalny błąd wyraża się więc wzorem

$$e_i = \sigma^2_{S_i}(C) - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, C_{s_i x_k}(0) \tag{6}$$

II. Przypadek gdy B jest wektorem zerowym

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia minimum wyrażenia

$$e_i = E\left\{(S_i - Y_i)^2\right\} = E\left\{(S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k)^2\right\}$$

Przy ustalonym i pochodna tego wyrażenia ze względu na a_{ik} wynosi

$$\frac{\partial e_i}{\partial a_{ik}} = -2\, E\left\{(S_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)x_k\right\}$$

Z zasady ortogonalności (1), (2) wynika, że stałe a_{ij}, które minimalizują e_i są takie, że błąd $S_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ jest ortogonalny względem $x_1, \ldots, x_n$, tj.:

$$E\left\{(S_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)x_k\right\} = 0$$

$$E\left\{S_i x_k\right\} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, E\left\{x_j x_k\right\} \tag{7}$$

Korzystając ze wzoru

$$R_{xy}(\tau) = E\left\{x(t+\tau)y(t)\right\}$$

dla procesów stacjonarnych możemy wprowadzić oznaczenia

$$R_{x_j x_k}(0) = E\left\{(x_j x_k)\right\}$$

$$R_{s_i x_k}(0) = E\left\{(S_i x_k)\right\}$$

$$R_{s_i}(0) = E\left\{S_i^2\right\} \qquad i,j,k = 1,\ldots,n$$

Równania (7) można wtedy zapisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, R_{x_j x_k}(0) = R_{S_i x_k}(0) \tag{8}$$

Oznacza to, że dla ustalonego i otrzymujemy n równań ($k = 1,\ldots,n$), z których obliczamy n współczynników a_{ij} ($j = 1,\ldots,n$). Dla każdego i rozwiązujemy układ n równań o n niewiadomych a_{ij}.
Podstawiając (7) do e_i, obliczamy minimalny błłd

$$e_i = E\left\{(S_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k)S_i\right\} = E\left\{S_i^2\right\} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, E\left\{S_i x_k\right\}.$$

Stosując przyjęte oznaczenia, mamy

$$e_i = R_{S_i}(0) - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, R_{S_i x_k}(0) \tag{9}$$

III. Przypadek gdy A jest macierzą diagonalną, a B jest wektorem niezerowym

Należy teraz znaleźć współczynniki a_{ii} oraz b_i, które minimalizują błąd

$$e_i = E\left\{(S_i - a_{ii}x_i - b_i)^2\right\}$$

Dla wygody zapisu elementy macierzy A na głównej przekątnej zapisujemy w postaci a_i. Wzór (5) przybiera teraz postać

$$C_{s_i x_i}(0) = a_i X_{x_i x_i}(0)$$

$$a_i = \frac{C_{s_i x_i}(0)}{C_{x_i x_i}(0)}$$

Błąd natomiast wyraża się wzorem

$$e_i = \sigma^2_{S_i}(0) - a_i\, C_{S_i x_i}(0)$$

IV. Przypadek gdy A jest macierzą diagonalną, a B jest wektorem zerowym

W tym przypadku problem sprowadzamy do znalezienia współczynnika a_i, który minimalizuje błąd oszacowania sygnału wejściowego S_i poprzez wielkość $a_i x_i$. Minimalizujemy wyrażenie

$$e_i = \min_{a_i} E\left\{(S_i - a_i x_i)^2\right\}$$

Na podstawie (8) otrzymujemy

$$a_i R_{x_i x_i}(0) = R_{S_i x_i}(0)$$

$$a_i = \frac{R_{S_i x_i}(0)}{R_{x_i x_i}(0)} = \frac{E\left\{S_i x_i\right\}}{E\left\{x_i^2\right\}}.$$

Błąd takiego oszacowania wynosi na podst. (9)

$$e_i = R_{S_i}(0) - a_i R_{S_i x_i}(0).$$

Można to jeszcze zapisać w tej postaci

$$e_i = E\left\{S_i^2\right\} - \frac{E\left\{S_i x_i\right\}}{E\left\{x_i^2\right\}} E\left\{S_i x_i\right\} = E\left\{S_i^2\right\} - \frac{E^2\left\{S_i x_i\right\}}{E\left\{x_i^2\right\}}$$

V. Uwagi końcowe

Przekształcenie F było przez nas narzucone z góry w postaci liniowej. W celu zmniejszenia błędu estymacji można poszukiwać przekształcenia F także w postaci nieliniowej, jednak powoduje to poważne trudności praktyczne i analityczne w rozwiązaniu problemu. Im prostsze jest przekształcenie F, tym błąd oszacowania jest większy i odwrotnie.

Wpłynęło do Redakcji w listopadzie 1974 r.

LITERATURA

[1] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.

[2] Gichman I.I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1968.

[3] Nasr S.K.: A note on a noise process. Wurzburg 1960 t. 3, nr 1.

[4] Tzafestas S.G., Nightingale J.M.: Optimal filtering amoothing and prediction in linear distributed - parameter systems. Proc IEE 1968 t. 115, nr 8.

[5] Van der Grin ten P.M.E.M.: Stochastische Prozesse in der Mess und Regelungstechnik. München 1965 (materiały z konferencji).

[6] Czełpanow B.I.: Samonastrojka w kompleksnoj sistiemie pri otsutstwju opriornych dannych o dwojstwach signałow.

[7] Sosulin J.G.: Intierpoljacija i ekstrapoljacija markovskich signałov pri nalicii pomech. Izv. Akad. Nauk SSSR Techn. Kibern. 1969, nr 5.

[8] Vakarin I.A.: Metod opriedielienija niekotorych charaktieristik signala i pomechi. IWUZ Priborostrojenie 1968 nr 10.

[9] Wilenkin S.Ja.: Ob ocenkie sriedniewo w stacjonarnych processach. Tieorija Wieroj. i j. Prim. Moskwa 1959 t. 4, nr 4.

[10] Wołgin L.N.: Staticzeskij rasczot diskrietnych awtomaticzeskich sistem. Izwiestja An SSSR, OTN, Eniergietika i awtomatika 1960 nr 4.

МИНИМАЛИЗАЦИЯ ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ ПОСРЕДСТВОМ ПОДБОРА СООТВЕТСТБУЮЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ВХОД СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В статье приводится способ вычисления коэффициентов на вход системы, которые минимализируют влияние помех. Рассуждения проводятся на основе линейной среднеквадратной эстимации. Принято, что протеканя сигналов являются стохастическими стационарными процессами. Приводятся также формулы на вычисление ошибки эстимации.

MINIMALIZATION OF INTERFERENCE EFFECT THROUGH SELECTION OF SUITABLE COEFFICIENTS AT THE INPUT OF THE SYSTEM

S u m m a r y

In the paper a way of finding coefficients for the system input which would minimalize the disturbances influence has been given. The considera tions have been carried out on the base of linear medium - square estimation.

It was assumed that the signals courses were the stochastic stationary processes. The formulas for an error calculation of this estimation have been geven too.