

Kazimierz JAKUBCZYK

Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej

APROKSYMACJA FUNKCJI ŁUKAMI KOŁOWYMI
W STEROWANIU AUTOMATAMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia aproksymacji stycznychmi łukami kołowymi. Aproksymacja taka ma zastosowanie w sterowaniu maszynami do cięcia blachy i automatami kreślącymi. Podany tu algorytm pozwala na wykorzystanie komputera do sterowania tymi urządzeniami.

I. Wstęp

W pewnych szczególnych przypadkach obliczeń celowe jest wykorzystanie aproksymacji funkcji łukami kołowymi.

Na przykład szuka się funkcji aproksymującej w postaci łuków kołowych w wypadku stosowania sterowanych numerycznie automatów do cięcia blach i kreślenia rysunków. Urządzenie sterujące takiego automatu to prymitywny komputer z wbudowanym na stałe programem, zawierającym interpolatory podstawowych ruchów palnika (pisaka): po prostej, łuku kołowym i paraboli [2]. Kształt wycinanego (rysowanego) elementu musi więc być opisany takimi elementarnymi odcinkami. Zadanie to bez uciekania się do pomocy komputera staje się często bardzo trudne, a niejednokrotnie niewykonalne.

Opisane elementarnymi odcinkami elementy są często przemieszczane i obracane na płaszczyźnie (optymalizacja rozmieszczenia elementów na prosto kątnej płycie blaszanej). Ogranicza to w poważnym stopniu wykorzystanie paraboli do opisu kształtu elementów, gdyż automat "zna" tylko parabole o osi poziomej lub pionowej. Dlatego krzywoliniowe odcinki konturu, po którym będzie się poruszał palnik (pisak) trzeba najczęściej opisać łukami kołowymi.

Zagadnienie aproksymacji kołowej jest następujące:

Dla danej różniczkowalnej w przedziale $[a, b]$ funkcji f (w końcach przedziału istnieją pochodne jednostronne) należy tak dobrać funkcję aproksymującą S , będącą sklejeniem skończonej ilości kolejno stycznych do siebie łuków kołowych i odcinków prostych, ażeby wielkość

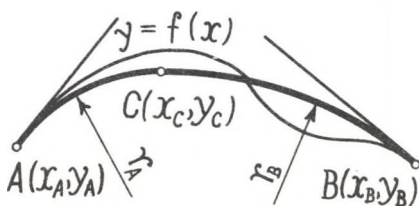
$$\max |f(x) - S(x)|$$
$$x \in [a, b]$$

była wystarczająco mała. Odcinek prostej można tu potraktować jako łuk kołowy o promieniu $r = \infty$.

Niżej podana jest metoda efektywnego uzyskania takiego przybliżenia, nadająca się do zaprogramowania na komputerze.

II. Metoda aproksymacji

Istota metody pokazana jest na rys. 1. Krzywoliniowy odcinek funkcji f przybliżony został w pewnym przedziale $[x_A, x_B] \subset [a, b]$ dwoma łukami kołowymi, z których pierwszy o promieniu r_A jest styczny do funkcji f w punkcie A, drugi o promieniu r_B - w punkcie B. Ponadto obydwa łuki są styczne do siebie w pewnym punkcie C, leżącym w zakresie przedziału $[x_A, x_B]$.



Rys. 1

Funkcja przybliżona byłaby w przedziale $[x_A, x_B]$ odcinkiem prostej wtedy, gdyby styczne do niej w punktach A i B pokrywały się.

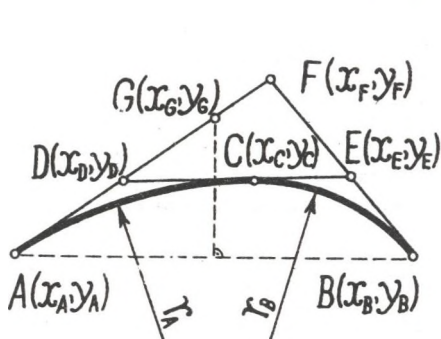
Najpierw szuka się dwu łuków kołowych (odcinka prostej) dla całego przedziału $[a, b]$. Jeżeli znalezione łuki (prosta) przybliżają funkcję wystarczająco dokładnie, tworzą szukaną funkcję aproksymującą. Jeśli natomiast dokładność przybliżenia jest niedostateczna, przedział $[a, b]$ dzieli się na dwie części, np. na połowy i w pierwszej z nich szuka się pary łuków (prostej). Po skończonej ilości takich kroków uzyskuje się żadaną dokładność aproksymacji dwoma łukami (prostą) w pewnym przedziale $[a, c] \subset [a, b]$. Z przedziałem $[c, b]$ postępuje się analogicznie jak z $[a, b]$.

W rezultacie przedział $[a, b]$ zostanie iteracyjnie podzielony na skończoną ilość odcinków, w których funkcja przybliżona będzie dwoma łukami kołowymi lub prostą. Sklejenie tych wszystkich łuków i odcinków prostych jest szukanym przybliżeniem S funkcji f w przedziale $[a, b]$.

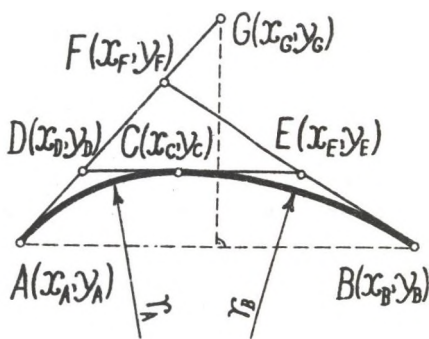
Łatwo zauważyć, że istnieje nieskończenie wiele par łuków kołowych, przybliżających z różną dokładnością funkcję f w przedziale $[x_A, x_B]$.

W celu wyznaczenia jednej takiej pary poprowadźmy styczne do funkcji w punktach A i B i obierzmy na pierwszej z nich punkt D, leżący na prawo od punktu A i na lewo od

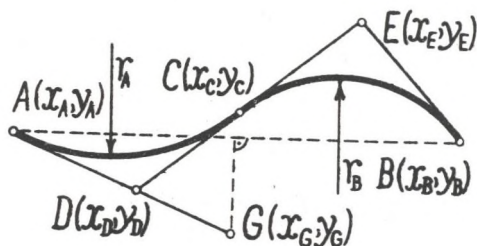
- punktu F przecięcia się stycznych i punktu G przecięcia się pierwszej stycznej z symetralną odcinka łączącego punkty A i B, gdy styczne przecinają się w przedziale $[x_A, x_B]$ (rys. 2 i 3);
- punktu G przecięcia się pierwszej stycznej z symetralną odcinka łączącego punkty A i B, gdy styczne są równoległe lub przecinają się poza przedziałem $[x_A, x_B]$ (rys. 4).



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zakładamy, że styczne nie pokrywają się, gdyż w przypadku przeciwnym przybliżylibyśmy funkcję odcinkiem prostej.

Poprowadźmy przez punkt D prostą

$$y - y_D = k(x - x_D) \tag{1}$$

o współczynniku kątowym $k \neq y'_A = f'(x_A)$ i $k \neq y'_B = f'(x_B)$, przecinającą drugą styczną w punkcie E takim, żeby długość odcinka łączącego punkty D i E była równa sumie długości odcinków łączących punkty A z D i B z E.

Mamy zatem

$$\sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} + \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2} = \sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2} \tag{2}$$

Punkty D i E leżą na stycznych, a ponadto punkt E na prostej (1), spełnione są więc równości

$$y_D - y_A = y'_A(x_D - x_A)$$

$$y_E - y_B = y'_B(x_E - x_B)$$

$$y_E - y_D = k(x_E - x_D)$$

Stąd, wyznaczając wielkości x_E , y_D , y_E i wstawiając je do równania (2) drogą prostych przekształceń dostajemy równanie kwadratowe ze względu na k

$$k^2(\alpha^2 - \beta^2) - 2k\alpha\gamma + \gamma^2 - \beta^2 = 0,$$

gdzie:

$$\alpha = (x_D - x_A)\sqrt{1 + y'_A{}^2} - (x_D - x_B)\sqrt{1 + y'_B{}^2} \quad (3)$$

$$\beta = y_B - y_A + y'_B(x_D - x_B) - y'_A(x_D - x_A)$$

oraz

$$\gamma = y'_B\alpha + \sqrt{1 + y'_B{}^2}\beta$$

Równanie to posiada pierwiastki

$$k = y'_B$$

oraz

$$k = y'_B + 2\beta \frac{\beta y'_B + \alpha\sqrt{1 + y'_B{}^2}}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad (4)$$

z których pierwszy odrzucamy ze względu na założenia o prostej (1).

Możemy teraz na prostej (1) znaleźć punkt C leżący na prawo od punktu D w odległości takiej samej jak A . Ze względu na wybór k punkty B i C są równoodległe od punktu E , a zatem C jest punktem sklejenia szukanych dwu łuków kołowych. Z równań parametrycznych

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_D - \frac{t}{\sqrt{1 + y'_A{}^2}} \\ y = y_D - t \frac{y'_A}{\sqrt{1 + y'_A{}^2}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_D + \frac{t}{\sqrt{1 + k^2}} \\ y = y_D + t \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} \end{array} \right. \quad (-\infty < t < \infty)$$

przedstawiających styczną do funkcji f w punkcie A i prostą (1) wynika, że współrzędne punktu C wyrażają się wzorami

$$x_C = x_D + (x_D - x_A) \sqrt{\frac{1 + y_A'^2}{1 + k^2}} \quad (5),$$

$$y_C = y_A + (x_D - x_A) \left(y_A' + k \sqrt{\frac{1 + y_A'^2}{1 + k^2}} \right)$$

Nietrudno teraz znaleźć środki $O_A(p_A, q_A)$ i $O_B(p_B, q_B)$ oraz promienie r_A i r_B szukanych łuków:

$$\begin{aligned} q_A &= y_A + \frac{k(y_C - y_A) + x_C - x_A}{k - y_A'} & q_B &= y_B + \frac{k(y_C - y_B) + x_C - x_B}{k - y_B'} \\ p_A &= x_A - y_A'(q_A - y_A) & p_B &= x_B - y_B'(q_B - y_B) \\ r_A &= |q_A - y_A| \sqrt{1 + y_A'^2} & r_B &= |q_B - y_B| \sqrt{1 + y_B'^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Zbiór wszystkich par S łuków kołowych, przybliżających funkcję f w przedziale $[x_A, x_B]$, tworzy jednoparametrową rodzinę funkcji. Parametrem może tu być współrzędna x_D punktu D .

Punkt D można w każdym przedziale $[x_A, x_B]$ szukać pary łuków przyjmować tylko raz, np. w środku określonego wyżej odcinka stycznej. Jednak na ogół para łuków S odpowiadająca takiemu D nie będzie najlepiej ze wszystkich par rodziny przybliżać funkcję. Może się zdarzyć, że doprowadzi się do niepotrzebnego dalszego podziału przedziału $[x_A, x_B]$ na części, w których będzie się szukać przybliżeń, mimo że już w samym przedziale $[x_A, x_B]$ istniała para łuków, przybliżająca funkcję z wystarczającą dokładnością. Wskazany byłby więc wybór takiego D , ażeby odpowiadająca mu para łuków \bar{S} spełniała lub była bliska spełnienia równości

$$\max_{x \in [x_A, x_B]} |f(x) - \bar{S}(x)| = \min_S \max_{x \in [x_A, x_B]} |f(x) - S(x)| \quad (7)$$

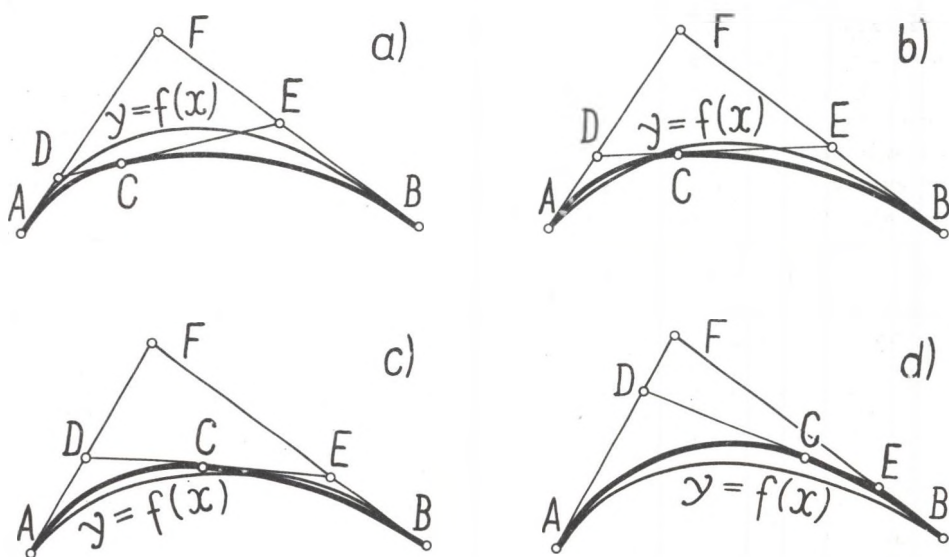
III. Dokładność przybliżenia

Odchyłkę dwułukowego przybliżenia S od funkcji f można oszacować obliczając wartości funkcji

$$\delta(x) = f(x) - S(x) \quad (8)$$

w dostatecznej ilości punktów przedziału $[x_A, x_B]$. Jest to sposób skuteczny przy wykorzystaniu elektronicznej maszyny matematycznej. Funkcja δ może najogólniej posiadać wiele ekstremów lokalnych, dlatego w przypadku ogólnym trudno byłoby szukać przybliżenia możliwie optymalnego \bar{S} . Toteż wtedy punkt D w każdym przedziale $[x_A, x_B]$ szukania pary łuków będzie się raczej przyjmować tylko raz, rezygnując tym samym ze znalezienia pary \bar{S} .

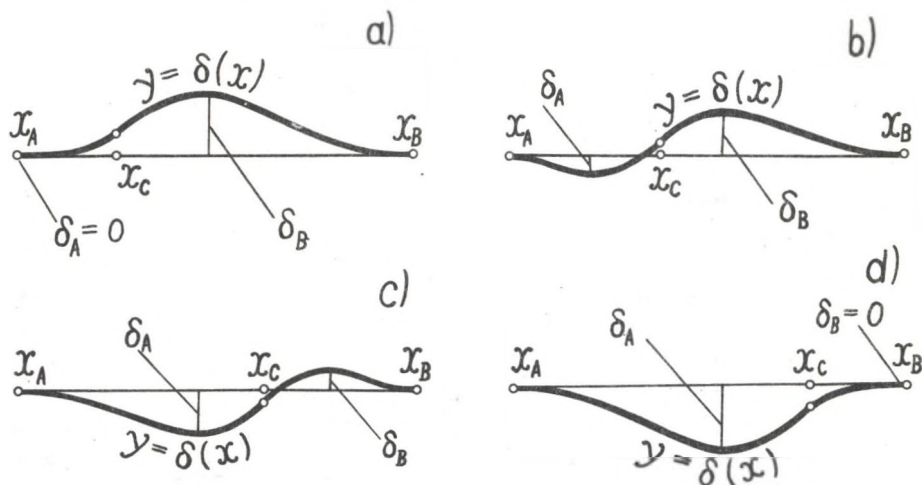
Interesujący staje się przypadek, gdy przedział wyjściowy daje się podzielić na odcinki, w których funkcja posiada monotoniczną krzywiznę (moduł). Wówczas przybliżanie dwoma łukami lub prostą dobrze jest rozpocząć od każdego takiego odcinka. Stosując w razie potrzeby odbicie symetryczne względem osi y , możemy taki odcinek funkcji zawsze sprowadzić do odcinka o krzywiznie nierosnącej. Wnikając w problem krzywizny można się przekonać, że wtedy funkcje f i S mogą przebiegać względem siebie tylko tak jak pokazuje rys. 5 lub symetrycznie względem osi x (zakładamy, że f nie



Rys. 5

jest łukiem koła w całym przedziale $[x_A, x_B]$, gdyż w przypadku przeciwnym $f \neq S$). Gdy punkt D przesuwają się od punktu bliskiego A do punktu bliskiego F , wzajemne położenie wykresów funkcji f i S zmienia się począwszy od sytuacji 5a poprzez 5b i 5c aż do 5d, przy czym zawsze $f'(x_C) > S'(x_C)$ (w przypadku symetrycznym $f'(x_C) < S'(x_C)$).

Nietrudno zauważyć, że rys. 5 jest równoważny rys. 6, na którym pokazane jest zachowanie się funkcji (8).



Rys. 6

Niech

$$\delta_M = \max_{x \in [x_A, x_B]} |\delta(x)|$$

oraz

$$\delta_A = - \min_{x \in [x_A, x_C]} \delta(x)$$

$$\delta_D = \max_{x \in [x_C, x_B]} \delta(x)$$

w przypadku pokazanym na rys. 6, zaś

$$\delta_A = \max_{x \in [x_A, x_C]} \delta(x)$$

$$\delta_B = - \min_{x \in [x_C, x_B]} \delta(x)$$

w przypadku symetrycznym. Zauważmy, że

$$\delta_M = \max \{ \delta_A, \delta_B \}$$

Jeżeli punkt D porusza się od A do F, wielkość δ_A rośnie od zera do pewnej wartości maksymalnej, natomiast δ_B maleje od pewnej wartości maksymalnej do zera. A zatem istnieje takie D, przy którym $\delta_A = \delta_B$, a zarazem δ_M jest minimalne. Para łuków odpowiadająca temu D tworzy przybliżenie \bar{S} optymalne, spełniające równość (7).

Nasuwa się tu następujące postępowanie:

Iteracyjnie tak przesuwamy punkt D (w kroku pierwszym można go przyjąć w środku odcinka łączącego punkty A i F), ażeby odchyłka δ_M malała. Po skończonej ilości kroków znajdziemy D takie, że albo δ_M będzie dostatecznie małe, albo jednocześnie δ_A i δ_B przekroczą dopuszczalną dokładność. W przypadku pierwszym kończymy proces aproksymacji w przedziale $[x_A, x_B]$, gdyż znalezione łuki dają przybliżenie wystarczająco dobre, natomiast w przypadku drugim dzielimy przedział $[x_A, x_B]$ na dwa i szukamy przybliżeń w przedziałach mniejszych.

Wartości δ_A i δ_B można znaleźć wieloma sposobami, np. obliczając wartości funkcji δ w dużej ilości punktów, stosując metodę iteracyjną szukania ekstremów czy też przybliżając funkcję δ inną funkcją dobrze ją charakteryzującą. Rys. 6 wskazuje, że funkcję δ daje się z powodzeniem w każdym z przedziałów $[x_A, x_C]$ i $[x_C, x_B]$ zastąpić wielomianem stopnia trzeciego.

Niech więc

$$P_A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (9)$$

będzie wielomianem przybliżającym δ w przedziale $[x_A, x_C]$.
Położmy

$$h = \delta(x_C) \quad \text{oraz} \quad h' = \delta'(x_C) \quad (10)$$

Od współczynników wielomianu (9) żądamy, ażeby spełniały układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_A + a_2x_A^2 + a_3x_A^3 = 0 \\ a_1 + 2a_2x_A + 3a_3x_A^2 = 0 \\ a_0 + a_1x_C + a_2x_C^2 + a_3x_C^3 = h \\ a_1 + 2a_2x_C + 3a_3x_C^2 = h' \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ i znajdując punkt ekstremalny $\xi_A \neq x_A$ wielomianu (9) oraz wartość tego wielomianu w tym punkcie, otrzymujemy

$$\xi_A = x_C - \frac{(x_C - x_A)^2 h'}{3[(x_C - x_A)h' - 2h]} \quad (11)$$

oraz

$$P_A(\xi_A) = h + [(x_C - x_A)h']^2 \frac{9h - 4(x_C - x_A)h'}{27[(x_C - x_A)h' - 2h]^2} \quad (12)$$

Analogicznie, zastępując w przedziale $[x_C, x_B]$ funkcję δ wielomianem $P_B(x)$, dostajemy

$$\xi_B = x_C - \frac{(x_C - x_B)^2 h'}{3[(x_C - x_B)h' - 2h]} \quad (13)$$

oraz

$$P_B(\xi_B) = h + [(x_C - x_B)h']^2 \frac{9h - 4(x_C - x_B)h'}{27[(x_C - x_B)h' - 2h]^2} \quad (14)$$

Ostatecznie mamy

$$\delta_A \approx \begin{cases} |P_A(\xi_A)|, & \text{gdy } \xi_A \in (x_A, x_C) \\ 0 & \text{gdy } \xi_A \in (x_C, x_A) \end{cases}$$

$$\delta_B \approx \begin{cases} |P_B(\xi_B)|, & \text{gdy } \xi_B \in (x_C, x_B) \\ 0 & \text{gdy } \xi_B \in (x_C, x_B) \end{cases}$$

Tabela 1

x_i	y_i	P_i	q_i	r_i	d_i	d_i^2
0.000000	0.000000	51.721273	51.721273	73.144926	0.00001708	0.00001708
0.077624	-0.077508	10.210563	10.085869	14.351679	0.00001785	0.00001785
0.154672	-0.153747	7.376381	7.199509	10.306759	0.00001120	0.00001120
0.222070	-0.219335	4.747197	4.473360	6.519061	0.00001446	0.00001446
0.290011	-0.283913	4.029272	3.707100	5.469028	0.00000893	0.00000893
0.349582	-0.391399	3.105631	2.691511	4.096244	0.00001073	0.00001070
0.461104	-0.436595	2.787031	2.327350	3.612385	0.00000734	0.00000736
0.512050	-0.478486	2.326199	1.779734	2.896670	0.00000781	0.00000779
0.606364	-0.550630	2.075235	1.467338	2.492952	0.00004908	0.00004948
0.693383	-0.610042	1.634753	0.862195	1.747472	0.00004852	0.00004852
0.764474	-0.652778	1.501936	0.654477	1.500922	0.00002760	0.00002787
0.829382	-0.686754	1.337910	0.363718	1.167087	0.00002170	0.00002139
0.881934	-0.710439	1.287504	0.259295	1.051405	0.00001234	0.00001246
0.931381	-0.729395	1.223159	0.105697	0.884597	0.00000967	0.00000953
1.006017	-0.751477	1.196301	0.028826	0.803170	0.00003207	0.00003273
1.084381	-0.765605	1.161193	-0.115142	0.654983	0.00003393	0.00003288
1.148050	-0.769757	1.15792	-0.160883	0.608924	0.00001513	0.00001554
1.237380	-0.763739	1.155173	-0.209530	0.560273	0.00001293	0.00001052
1.350268	-0.734797	1.154796	-0.206989	0.562842	0.00004120	0.00003209
1.428035	-0.699993	1.126374	-0.130244	0.644681	0.00004188	0.00004433
1.500713	-0.655758	1.095013	-0.071012	0.711703	0.00004976	0.00004572
1.571026	-0.601655	0.987438	0.084038	0.904416	0.00004982	0.00005242
1.625548	-0.553666	0.915983	0.167995	1.010664	0.00002630	0.00002520
1.678270	-0.496521	0.744730	0.342660	1.252277	0.00003990	0.00003102
1.717795	-0.450569	0.647227	0.430308	1.386384	0.00001300	0.00001262
1.758702	-0.398771	0.446155	0.595752	1.646772	0.00001356	0.00001394
1.811434	-0.316660	0.296373	0.709243	1.834694	0.00004766	0.00004574
1.879351	-0.219903	-0.156894	1.014956	2.381422	0.00004810	0.00005006
1.931983	-0.118326	-0.438047	1.185458	2.710235	0.00004990	0.00004803
2.000000	0.000000	-1.126945	1.563473	3.496031	0.00004979	0.00005171

Przykład. Tabela 1 przedstawia wynik zastosowania powyższego algorytmu aproksymacji do wielomianu $y = \frac{1}{4}x^3 - x$ w przedziale $[0,2]$ z dokładnością 0.00005. Obliczenia przeprowadzono na komputerze ODRA 1304. Kolumny $x_i, y_i, p_i, q_i, r_i, d_i$ oznaczają kolejno: współrzędne punktów podziału przedziału $[0,2]$, współrzędne środków i promienie aproksymujących łuków oraz odchylenia tych łuków od wielomianu obliczone za pomocą wzorów (12) i (14). W kolumnie δ_i podano wartości dokładne tych odchylenia.

IV. Uwagi końcowe

Funkcja aproksymująca S posiada nie więcej punktów przegięcia od funkcji f . Ilości punktów przegięcia są takie same, gdy rozpocznie się proces aproksymacji od podziału przedziału $[a,b]$ na odcinki, wewnątrz których funkcja f nie posiada punktów przegięcia. Wtedy przybliżenie S dobrze charakteryzuje funkcję f .

Wykorzystując wzory (3), (4), (5) i (6) można podać algorytm interpolacji łukami kołowymi. Oprócz węzłów x_1, x_2, \dots, x_n i wartości y_1, y_2, \dots, y_n funkcji f w tych węzłach potrzebne tu są wartości y'_1, y'_2, \dots, y'_n pochodnej funkcji w węzłach. Jeżeli wartości pochodnej nie są znane, można je zastąpić średnimi nachyleniami odcinków łączących punkty (x_i, y_i) .

Wpłynęło do Redakcji w czerwcu 1974 r.

LITERATURA

- [1] Goetz A.: Geometria różniczkowa, Warszawa 1965.
- [2] Juranek J.: ASTER - system przygotowawczo-sterujący w obróbce elementów konstrukcyjnych kadłuba okrętu, Informatyka 2 (1971).

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ КРУГОВЫМИ ДУГАМИ
В УПРАВЛЕНИИ АВТОМАТАМИ

Р е з ю м е

В работе представлено решение вопроса аппроксимации касательными круговыми дугами. Эта аппроксимация применяется в управлении машинами для резки металлических листов и чертёжными автоматами.

Здесь приведён алгоритм позволяет использовать компьютер для управления этими устройствами.

APPROXIMATION OF FUNCTION BY CIRCULAR ARCS
IN STEERAGE OF AUTOMATONS

S u m m a r y

In this paper presented the solution of a problem of approximation by tangential circular arcs. This approximation is applied to steerage of machines for metal sheet cutting and graphic automatons. The here served algorithm permits to use a computer for control of these devices.