ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Janina GŁOMB

Instytut Matematyki
Zakład Geometrii Wykreślnej

ODPOWIEDNIOŚĆ W PRZESTRZENI OKREŚLONA PRZEZ PRZECIĘCIE TRZECH PŁASZCZYZN BIEGUNOWYCH TRZECH KWADRYK

Streszczenie. W pracy przedstawiono przekształcenie biegunowe dowolnego punktu przestrzeni rzutowej względem trzech powierzchni stopnia drugiego. Udowodniono, że obrazem biegunowym prostej względem trzech powierzchni stopnia drugiego jest krzywa przestrzenna rzędu trzeciego. Zbiór prostych przecinających dowolną prostą i jej obraz biegunowy wyznacza powierzchnię prostokreślną drugiego stopnia.

I. Wstęp

Rozważania prowadzimy w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej, którą oznaczamy W^3. W przestrzeni tej przyjęto trzy powierzchnie stopnia drugiego E_1, E_2, E_3. Dla poszczególnych punktów A, B, C ..... przestrzeni W^3 konstruujemy płaszczyzny biegunowe odpowiednio ε_A^1, ε_B^1, ... względem E_1, ε_A^2, ε_B^2,..... względem E_2, ε_A^3, ε_B^3, ... względem E_3.

DEFINICJA 1. Części wspólne $A' = \varepsilon_A^1 \cap \varepsilon_A^2 \cap \varepsilon_A^3$, $B' = \varepsilon_B^1 \cap \varepsilon_B^2 \cap \varepsilon_B^3$ ... odpowiednich płaszczyzn biegunowych punktów A, B, C ...... względem trzech powierzchni E_1, E_2, E_3 nazywamy obrazami biegunowymi.

II. Obraz biegunowy punktu

Obrazem biegunowym punktu może być:

a) punkt - dla trzech różnych płaszczyzn biegunowych,
b) prosta - jeśli dwie płaszczyzny biegunowe będą zjednoczone,
c) płaszczyzna - dla trzech płaszczyzn biegunowych zjednoczonych.

Można więc punkty przestrzeni W^3 podzielić na trzy klasy:

a°) punkty zwyczajne - których obrazami biegunowymi są jednoznacznie określone punkty,
b°) punkty niezwyczajne - których obrazami biegunowymi są proste,
c°) punkty osobliwe - których obrazami biegunowymi są płaszczyzny.

III. Obraz biegunowy prostej

DEFINICJA 2. Obrazem biegunowym prostej nazywamy zbiór obrazów biegunowych poszczególnych punktów tej prostej.

TWIERDZENIE. Obrazem biegunowym dowolnej prostej "a" należącej do przestrzeni W^3 jest krzywa przestrzenna rzędu trzeciego.

D o w ó d. Dla poszczególnych punktów A, B, C ..... prostej "a" płaszczyzny biegunowe względem powierzchni E_1, E_2, E_3 utworzą pęki o osiach a_1, a_2, a_3 (gdzie a_1, a_2, a_3 są prostymi sprzężonymi z "a" odpowiednio względem powierzchni E_1 E_2 E_3).

Pęki płaszczyzn o osiach a_1, a_2, a_3 są rzutowe do szeregu punktów prostej "a"

a) $A, B, C \ldots\ldots \barwedge a_1 (\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C \ldots\ldots)$ .... (1)

a) $A, B, C \ldots\ldots \barwedge a_2 (\beta_A, \beta_B, \beta_C \ldots\ldots)$ .... (2)

a) $A, B, C \ldots\ldots \barwedge a_3 (\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C \ldots\ldots)$ .... (3)

Z zależności (1) (2) (3) wynika rzutowość pęków płaszczyzn:

$$a_1 (\alpha_A \ldots\ldots) \barwedge a_2 (\beta_A \ldots\ldots) \barwedge a_3 (\gamma_A \ldots\ldots).$$

Punkty przecięcia płaszczyzn homologicznych tych trzech rzutowych pęków płaszczyzn wyznaczają krzywą przestrzenną rzędu trzeciego C^3.

IV. Własności

1. Jeśli prosta $a \in W^3$ (należy do przestrzeni W^3), obrazem jej względem trzech powierzchni będzie krzywa przestrzenna rzędu trzeciego C^3 rozłączna z daną prostą "a".

$$a \cap C^3 = \phi \,, \quad \text{gdzie } a_1, a_2, a_3 \text{ bisekanty krzywej } C^3$$

2. Jeśli prosta "a" wyznaczona jest przez punkty A i A', wtedy "a" jest bisekantą krzywej wyznaczonej.

3. Dla dowolnej prostej "a", przechodzącej przez środek jednej z kwadryk, obrazem biegunowym jest parabola hiperboliczna.

D o w ó d. Prosta biegunowa a' względem tej kwadryki jest prostą niewłaściwą. Otrzymamy trzy rzutowe pęki płaszczyzn, z których oś jednego pęku jest prostą niewłaściwą

$$\overline{a'_1}(\alpha_1, \beta_1 \ldots.) \barwedge a'_2(\alpha_2 \ldots.) \barwedge a'_3(\alpha_3 \ldots.)$$

Wynika stąd, że z każdą prostą $a_1'^{\infty}$, a_2', a_3' krzywa posiada tylko dwa wspólne punkty. Niewłaściwa płaszczyzna posiada z krzywą C^3 dwa wspólne punkty, przy czym w jednym z nich jest styczną do krzywej.

4. Dla prostej "a" łączącej środki dwóch kwadryk obrazem biegunowym jest hiperbola skośna.

D o w ó d. Biegunowe sprzężone prostej "a" względem dwóch kwadryk są prostymi niewłaściwymi przynależnymi do jednej płaszczyzny niewłaściwej. Biegunowa prostej "a" względem trzeciej powierzchni jest prostą właściwą.

$$a_1'^{\infty} \barwedge a_2'^{\infty} \barwedge a_3'$$

Płaszczyzna niewłaściwa ma z krzywą skośną trzeciego rzędu trzy niewłaściwe punkty wspólne.

5. Jeżeli środki trzech rozważanych kwadryk będą leżały na jednej prostej "a", to obrazem biegunowych tej prostej jest parabola sześcienna.

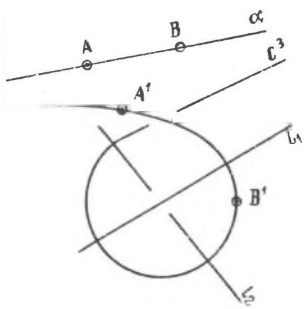
D o w ó d. Biegunowe sprzężone prostej "a" względem tych trzech kwadryk są prostymi niewłaściwymi $(a_1'^{\infty}, a_2'^{\infty}, a_3'^{\infty})$ przynależnymi do jednej płaszczyzny niewłaściwej. Z przynależności środków kwadryk do prostej "a" wynika przynależność niewłaściwego punktu wspólnego trzech płaszczyzn biegunowych do krzywej C^3.

Płaszczyzna niewłaściwa jest styczną do krzywej C^3 w tym punkcie.

6. Dla dowolnej prostej "a" obrazem jest elipsa sześcienna.

D o w ó d. Punkt niewłaściwy wspólny dla krzywej C^3 i płaszczyzny niewłaściwej wyznaczony jest jako punkt przecięcia płaszczyzn biegunowych z których dwie wyznaczają prostą niewłaściwą.

V. Zbiór bisekantów przecinających prostą



Lemat:

Zbiór bisekantów krzywej C^3 przecinających prostą "a", wyznacza powierzchnię prostokreślną stopnia drugiego.

D o w ó d. Niech C^3 (wyznaczone przez odpowiedniość biegunową względem trzech kwadryk) będzie obrazem biegunowym prostej "a". l_1, l_2 - dowolne bisekanty krzywej C^3.

Rzutując z prostej l_1 i l_2 punkty krzywej C^3 otrzymamy dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$l_1\,(A', B' \ldots\ldots) \barwedge l_2\,(A', B' \ldots\ldots)$$

Elementami pęku o osi l_1 są płaszczyzny: $\alpha_1 = l_1 A'$, $\alpha_2 = l_1 B' \ldots\ldots$
Elementami pęku o osi l_2 są płaszczyzny: $\beta_1 = l_2 A'$, $\beta_2 = l_2 B' \ldots\ldots$
Krawędzie przecięcia płaszczyzn: $\alpha_1 \cap \beta_1 = r_1$, $\alpha_2 \times \beta_2 = r_2 \ldots\ldots$ wyznaczają dowolne sieczne krzywej C^3.
Niech sieczne r_1 i r_2 będą osiami pęków płaszczyzn rzutujących punkty prostej "a".

$$r_1(ABC \ldots\ldots) \barwedge a(ABC \ldots\ldots) \barwedge r_2(ABC \ldots\ldots)$$

Z zależności tej wynika, że

$$r_1 \barwedge r_2$$

Krawędzie przecięcia elementów homologicznych tych dwóch rzutowych pęków są bisekantami krzywej C^3, zaś utworem dwóch rzutowych pęków płaszczyzn jest powierzchnia prostokreślna stopnia drugiego.

Wpłynęło do Redakcji w listopadzie 1974 r.

LITERATURA

[1] Głagolew N.A.: Projektivnaja geometria. Moskwa 1963.
[2] Matla R.: Biegunowa sprzężoność względem dwóch powierzchni stopnia drugiego. ZN Geometria Wykreślna nr 7, (1970).
[3] Leś J.: O pewnej konstrukcji powierzchni drugiego stopnia ZN Politechniki Śląskiej S. Mat.-Fiz. nr 15.

ОБ ОДНОМ СООТВЕТСТВИИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривается такое отображение в проективном пространстве, в котором произвольному множеству точек соответствуем множество их полюсов относительно трех поверхностей двух степении. Доказано, что прямой соответствует пространственная кривая третьего порядка.

Множество премых пересскающих одновременно произвольную премую "а" и соответствующую ею кривую 3-го порядка C^3 образует линейчатую поверхность 2 порядка.

CORRESPONDENCE IN PROJEKTIVE SPACE DETERMINED
BY CUTTING THREE POLAR PLANES OF THREE QUADRICS

S u m m a r y

The paper deals with the polar transformation of any point of the projective space with respect to three surfaces of the second degree.

It has been shown that to any straigth line there corresponds a space curve of third order.

A set of straight lines cutting any straight line as well as its polar curve give a straight drawable surface of the second degree.