ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Idzi RODEK

# POSTACIE NORMALNE JAKO INNA METODA SPRAWDZANIA, CZY WYRAŻENIA SENSOWNE RACHUNKU ZDAŃ SĄ TAUTOLOGIAMI

K o m u n i k a t

DEFINICJA 1. Wyrażenia sensowne rachunku zdań są to funkcje zdaniowe, w których występują zmienne zdaniowe połączone funktorami zdaniotwórczymi: ($\vee, \equiv$ , $\rightarrow$, $\wedge$ i $\sim$).

DEFINICJA 2. Tautologie są to wyrażenia sensowne, które przechodzą zawsze w zdania prawdziwe, o ile zmienne zastąpimy zdaniami[1]. Pisać będziemy "$\vdash A$", zamiast "wyrażenie A jest tautologią".

DEFINICJA 3. Dwa wyrażenia sensowne rachunku zdań A i B nazywamy inferencyjnie równoważnymi, jeśli $\vdash A \equiv B$.

TWIERDZENIE 1. Dla wyrażeń sensownych rachunku zdań relacja inferencyjnej równoważności jest symetryczna zwrotna i przechodnia.

a) Jeśli A jest inferencyjnie równoważne $B(\vdash A \equiv B)$, to B jest inferencyjnie równoważne $A(\vdash B \equiv A)$.

D o w ó d. $\vdash (p \equiv q) \rightarrow (q \equiv p)$ ...... W.

Stosujemy regułę podstawiania (oznaczamy ją - R.P.). Jeżeli $\vdash W$ i T powstaje z W przez zastąpienie zmiennych p i q (na każdym miejscu, gdzie występowały one w W) wyrażeniami sensownymi A i B, to $\vdash T$.

Zatem $\vdash (A \equiv B) \rightarrow (B \equiv A)$ ...... T.

Stosujemy regułę odrywania (oznaczamy ją - R.O.).

Jeżeli $\vdash W$ i $\vdash W \rightarrow T$, to $\vdash T$.

Wnioskujemy stąd, że $\vdash B \equiv A$, c.n.d.

[1] Definicja ta jest wystarczająca w ramach niniejszego artykułu. W zakresie poszerzonym znajduje się w pracy A. Mostowskiego. Logika matematyczna. Warszawa 1948 r. s. 56.

b) $A$ jest inferencyjnie równoważne $A$

D o w ó d. $\vdash p \equiv p$

Stosując R.P. otrzymamy

$\vdash A \equiv A$, c.n.d.

c) Jeśli $A$ jest inferencyjnie równoważne $B$ a $B$ inferencyjnie równoważne $C$, to $A$ jest inferencyjnie równoważne $C$.

D o w ó d. $\vdash (p \equiv q) \rightarrow [(q \equiv r) \rightarrow (p \equiv r)]$

Stosując R.P. otrzymamy

$\vdash (A \equiv B) \rightarrow [(B \equiv C) \rightarrow (A \equiv C)]$

Z pierwszego założenia i R.O.

$\vdash (B \equiv C) \rightarrow (A \equiv C)$

Z drugiego założenia i R.O.

$\vdash A \equiv C$, c.n.d.

DEFINICJA 4. Alternatywą elementarną nazywać będziemy sumę logiczną, utworzoną ze zmiennych zdaniowych i z ich negacji, a także każdą zmienną i każdą negację zmiennej.

Np. $p \vee q \vee \sim s$, $\sim p \vee \sim q$, $p$, $\sim q$, $p \vee \sim q \vee s \vee t$.

DEFINICJA 5. Wyrażeniem o postaci normalnej nazywać będziemy koniunkcję dowolnej liczby alternatyw elementarnych a w szczególności każdą alternatywę elementarną.

Np. $p \wedge q$, $\sim p \wedge q \wedge s$, $(p \vee \sim q) \wedge (s \vee t)$, $(\sim p \vee p) \wedge (p \vee t \vee r)$

Z definicji 4 i 5 wynika

TWIERDZENIE 2. Suma logiczna dwu lub więcej alternatyw elementarnych jest znów alternatywą elementarną, iloczyn logiczny dwu lub więcej wyrażeń o postaci normalnej ma znów postać normalną.

TWIERDZENIE 3. Negacja alternatywy elementarnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.

D o w ó d. Niech $A$ jest alternatywą elementarną $p_1 \vee p_2 \vee \ldots\ldots \vee p_n \vee \sim q_1 \vee \ldots \vee \sim q_n$ o $n + m$ składnikach.

Zatem $\sim A$ w myśl prawa de Morgana jest inferencyjnie równoważne koniunkcji $\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \ldots \wedge \sim p_n \wedge \sim(\sim q_1) \wedge \ldots \wedge \sim(\sim q_m)$.
W myśl prawa podwójnego przeczenia $\sim A$ jest inferencyjnie równoważne wyrażeniu o postaci normalnej

$$\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \ldots \wedge \sim p_n \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m, \quad \text{c.n.d.}$$

TWIERDZENIE 4. Alternatywa dwu wyrażeń o postaci normalnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.

D o w ó d. Niech $A$ będzie koniunkcją $n$ alternatyw elementarnych $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ a $B$ koniunkcją $m$ alternatyw elementarnych. Twierdzenie udowodnimy przez indukcję względem $n + m$. Jeżeli $n + m = 2$, to $A$ i $B$ są alternatywami elementarnymi. Zatem, na podstawie tw. 2. $A + B$ jest też alternatywą elementarną, a więc ma postać normalną.
Załóżmy, że $n + m = k$, gdzie $k > 2$ i, że twierdzenie jest prawdziwe dla takich wyrażeń $A$ i $B$, gdzie $n + m < k$.
Można by założyć, że $A$ albo $B$ jest koniunkcją co najmniej dwu czynników.
Zatem $\vdash A \vee B \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vee B$.
Stosując prawo rozdzielności dodawania logicznego względem mnożenia $[(p \vee q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ wnosimy, że

$$\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vee B \equiv (A_1 \vee B) \wedge (A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vee B).$$

Na podstawie przechodniości inferencyjnej równoważności

$$\vdash A \vee B \equiv (A_1 \vee B) \wedge (A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vee B).$$

Ale zgodnie z założeniem indukcyjnym wyrażenia $A_1 \vee B$ i $A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vee B$ są inferencyjnie równoważne wyrażeniom $N_1$ i $N_2$ o postaci normalnej, tzn.

$$\vdash A_1 \vee B \equiv N_1$$

$$\vdash A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vee B \equiv N_2$$

Stosujemy tautologię

$\vdash (p \equiv q) \rightarrow \{(r \equiv s) \rightarrow [p \wedge r \equiv q \wedge s]\}$ i reguły: R.P. i R.O. otrzymując $\vdash (A_1 \vee B) \wedge (A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vee B) \equiv N_1 \wedge N_2$.

Na podstawie tw. 2 $N_1 \wedge N_2$ ma postać normalną a przechodniość daje

$\vdash A \vee B \equiv N_1 \wedge N_2$.

Dzięki indukcji otrzymujemy

TWIERDZENIE 5. Alternatywa dowolnej liczby wyrażeń o postaci normalnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej, c.n.d.

TWIERDZENIE 6. Negacja wyrażenia o postaci normalnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.

D o w ó d. Niech $A$ będzie koniunkcją $n$ alternatyw elementarnych $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$. W myśl prawa de Morgana

$\vdash \sim A \equiv \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n$.

Każde z wyrażeń $\sim A_i$ (dla $i = 1,2,\ldots,n$) na podstawie tw. 3 jest inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu $N_i$ o postaci normalnej. Wyrażenie $\sim A$ jest inferencyjnie równoważne alternatywie $N_1 \vee N_2 \vee \ldots \vee N_n$, która na podstawie tw. 5 jest inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu $N$ o postaci normalnej.
Zatem na podstawie inferencyjnej przechodniości

$\vdash \sim A \equiv N$, c.n.d.

TWIERDZENIE 7. Każde wyrażenie sensowne jest inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.

D o w ó d. Ponieważ każda zmienna ma sama przez się postać normalną, więc dla dowodu wystarczy wykazać, że jeżeli $A$ i $B$ są inferencyjnie równoważne wyrażeniom $M$ i $N$ o postaci normalnej, to i wyrażenia:

$\sim A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \to B$, $A \equiv B$

są inferencyjnie równoważne pewnym wyrażeniom o postaci normalnej.
Aby to wykazać, należy powołać się na tautologie:

(1) $\vdash (p \equiv q) \to (\sim p \equiv \sim q)$,
(2) $\vdash (p \equiv q) \to \{(r \equiv s) \to [(p \vee r) \equiv (q \vee s)]\}$,
(3) $\vdash (p \equiv q) \to \{(r \equiv s) \to [p \wedge r \equiv \sim(\sim q \vee \sim s)]\}$,
(4) $\vdash (p \equiv q) \to \{(r \equiv s) \to [(p \to r) \equiv (\sim q \vee s)]\}$,
(5) $\vdash (p \equiv q) \to ((r \equiv s) \to \{(p \equiv r) \equiv \sim[\sim(q \vee \sim s) \vee \sim(s \vee \sim q)]\})$.

Dowód przeprowadzimy dla wyrażenia sensownego $\sim A$.

Z założenia $\vdash A \equiv M$, a ponieważ

$\vdash (p \equiv q) \to (\sim p \equiv \sim q)$, zatem stosując R.P.

$\vdash (A \equiv M) \to (\sim A \equiv \sim M)$.

Ponieważ $\vdash A \equiv M$, więc na podstawie R.O.

$\vdash \sim A \equiv \sim M$

Z twierdzenia 6 $\sim M$ jest inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.
Na podstawie przechodniości $\sim A$ jest również inferencyjnie równoważne temu samemu wyrażeniu o postaci normalnej.
Obecnie przeprowadzimy dowód dla wyrażenia sensownego $A \lor B$.

Założenia: $\vdash A \equiv M$, $\vdash B \equiv N$

Teza: $\vdash A \lor B \equiv M \lor N$.

D o w ó d.

$\vdash (p \equiv q) \to \{(r \equiv s) \to [(p \lor r) \equiv (q \lor s)]\}$

Z założenia i R.P.

$\vdash (A \equiv M) \to \{(B \equiv N) \to [(A \lor B) \equiv (M \lor N)]\}$.

Stosując dwukrotnie R.O. otrzymamy:

$\vdash A \lor B \equiv M \lor N$.

Z tw. 6 $M \lor N$ jest inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej. Na podstawie przechodniości $A \lor B$ jest również inferencyjnie równoważne temu samemu wyrażeniu o postaci normalnej.
W analogiczny sposób można przeprowadzić dowody dla wyrażeń sensownych:
$A \land B$, $A \to B$, $A \equiv B$,
stosując odpowiednio tautologie (3), (4) i (5), c.n.d.

TWIERDZENIE 8. Alternatywa elementarna jest tautologią wtedy i tylko gdy co najmniej jedna zmienna występuje w niej raz po prostu jako zmienna, a raz pod znakiem negacji.
Wyrażenie o postaci normalnej jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda z alternatyw elementarnych, składających się na to wyrażenie, jest tautologią.

D o w ó d. Jeśli w alternatywie elementarnej A występują składniki $p$ i $\sim p$, to jakkolwiek nadamy zmiennym wartość 0 i 1 (używając zera jako symbolu fałszu, a jedności jako symbolu prawdy), otrzymamy zawsze 1.

Wyrażenie A jest w tym wypadku tautologią.
Jeśli A ma postać $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m \vee \sim q_1 \vee \sim q_2 \vee \ldots \vee \sim q_n$, gdzie żadna ze zmiennych $p_i$ nie pokrywa się z żadną ze zmiennych $q_j$ oraz gdy za zmienne $p_i$ wstawimy wartość 0, a za zmienne $q_j$ - wartość 1, to A nie jest tautologią, gdyż otrzyma wartość 0.
Jakiekolwiek inne podstawienie za zmienne $p_i$ oraz $q_j$ powodują, że wyrażenie A będzie zawsze tautologią.
Jeśli K jest koniunkcją n alternatyw elementarnych $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ i powyższy iloczyn jest tautologią, to poszczególne czynniki: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ też muszą być tautologiami, bo w przeciwnym razie jedna z tych alternatyw mogłaby osiągnąć wartość 0, a wtedy i K byłoby równe 0. Na odwrót, jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są tautologiami, to i K jest tautologią, gdyż K nie może przybrać wartość 0, skoro żaden z czynników tej wartości nigdy nie przybiera, c.n.d.

TWIERDZENIE 9. Jeśli A jest inferencyjnie równoważne B i $\vdash A$, to $\vdash B$.

D o w ó d

$\vdash (p \equiv q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Stosujemy R.P.

$\vdash (A \equiv B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Na podstawie pierwszego założenia i R.O.

$\vdash A \rightarrow B$

Drugie założenie i R.O. powoduje, że $\vdash B$, c.n.d.
Twierdzenia 8 i 9 dają nam możność sprawdzenia, czy dane wyrażenie sensowne jest tautologią. Należy mianowicie wyrażenie sensowne przekształcić na inferencyjnie równoważne wyrażenie o postaci normalnej i zbadać, czy w każdej z alternatyw elementarnych choć jedna zmienna występuje raz sama, a raz pod znakiem negacji.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy wyrażenie sensowne $p \rightarrow p$ jest tautologią. Ponieważ $p \rightarrow p$ jest inferencyjnie równoważne $\sim p \vee p$, a wyrażenie $\sim p \vee p$ na podstawie tw. 8 jest tautologią, zatem w oparciu o tw. 9 $p \rightarrow p$ jest tautologią.

Przykład 2

$A \ldots (p \wedge q \to r) \to [p \to (q \to r)]$

$A \equiv \sim(p \wedge q \to r) \vee [p \to (q \to r)$

$\equiv \sim [\sim(p \wedge q) \vee r] \vee [\sim p \vee (q \to r)] \equiv$

$\equiv \sim[\sim p \vee \sim q \vee r] \vee [\sim p \vee \sim q \vee r] \equiv$

$\equiv \sim s \vee s.$

Na podstawie tw. 8 $\sim s \vee s$ jest tautologią, zatem tw. 9 mówi, że i A jest tautologią.

Przykład 3

$B \ldots p \vee q \to p \wedge \sim q$

$B \equiv [\sim(p \vee q) \vee p \wedge \sim q] \equiv [\sim p \wedge \sim q \vee p \wedge \sim q] \equiv$

$\equiv [(\sim p \vee p) \wedge \sim q]$

Wyrażenie $(\sim p \vee p) \wedge \sim q$ nie jest tautologią, gdyż jeden z czynników - $(\sim q)$ nie jest tautologią.
Na podstawie tw. 9 wyrażenie B nie jest tautologią. W ostatnim przykładzie zastosowaliśmy prawo de Morgana i prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy. Należy również pamiętać, że każdy z funktorów v, $\equiv$, $\to$, $\wedge$ i $\sim$ wiąże mocniej niż poprzedzający.