ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

Seria: Matematyka-Fizyka z. 26 Nr kol. 441

Maria PICHOCKA

PEWIEN PROBLEM OPTYMALIZACJI ZWIĄZANY Z TEORIĄ GRAFÓW

K o m u n i k a t

I. Planuje się budowę zakładu przemysłowego, składającego się z oddziałów, przy następujących założeniach:

a) poszczególne oddziały będą wytwarzały półfabrykaty na potrzeby oddziałów innych lub produkt końcowy,
b) kolejność budowy oddziałów jest ściśle określona,
c) czas budowy oddziałów może zmieniać się w ustalonym przedziale, przy czym skrócenie czasu budowy powoduje wzrost jej kosztów.

Zadanie polega na znalezieniu takich czasów budowy poszczególnych oddziałów, które pozwolą zminimalizować całkowity koszt inwestycji z uwzględnieniem zysków wynikających z produkcji oddziałów uruchomionych jeszcze przed zakończeniem budowy całego zakładu.

II. <u>Ogólne sformułowanie zagadnienia</u>. Niech inwestycja składa się z n zadań częściowych, w tym p $(p \leqslant n)$ zrealizowanych obiektów przynosi dochód przed zakończeniem inwestycji. Załóżmy, że dla każdego zadania częściowego określony jest przedział czasowy jego realizacji $\underline{t}_i \leqslant t_i \leqslant \bar{t}_i$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$, gdzie

$\underline{t}_i$ - najkrótszy, przewidywany czas i-tego zadania,

$\bar{t}_i$ - najdłuższy, przewidywany czas i-tego zadania.

Wówczas koszt zrealizowania inwestycji przy najdłuższych czasach realizacji zadań częściowych wyniesie

$$K_{\bar{T}} = \sum_{i=1}^{n} K_i - \sum_{j=1}^{p} a_j(\bar{T} - \bar{t}_{oj}),$$

gdzie:

- K_i - koszt wykonania i-tego zadania w czasie $\bar{t}_i$,
- a_j - jednostkowy dochód i-tego zadania w czasie $\bar{t}_i$,
- $\bar{t}_{oj}$ - czas ukończenia j-tego obiektu przy realizacji zadań częściowych w czasie $\bar{t}_i$ począwszy od chwili rozpoczęcia inwestycji,
- $\bar{T}$ - najdłuższy, przewidywany czas realizacji inwestycji.

Niech c_i oznacza jednostkowy przyrost kosztów wykonania i-tego zadania, wynikający ze skrócenia czasu realizacji tego zadania, wtedy ogólny koszt realizacji inwestycji wyniesie

$$K_t = \sum_{i=1}^{n} \left[K_i + c_i(\bar{t}_i - t_i)\right] + \sum_{j=1}^{p} a_j(\bar{T} - t_{oj}),$$

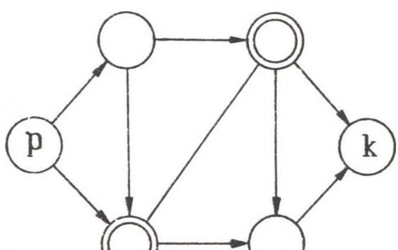
gdzie:

t_{oj} - czas ukończenia j-tego obiektu przy realizacji zadań częściowych w czasie t_i począwszy od chwili rozpoczęcia inwestycji.

Ponieważ istnieją takie wartości t_i, dla których $K_{\bar{t}} - K_t \geqslant 0$, więc zadanie minimalizacji ogólnego kosztu inwestycji K_t sprowadza się do maksymalizacji funkcji

$$\max \left[\sum_{i=1}^{n} c_i t_i + \sum_{j=1}^{p} a_j(\bar{t}_{oj} - t_{oj})\right].$$

III. Sformułowanie zagadnienia w teorii grafów. Dany jest graf $G = [X,U]$ złożony z elementów $x,y, \in X$ oraz podzbioru U par uporządkowanych (x,y) elementów zbioru X. Łuki x,y należy traktować jako zadania, a węzły jako zdarzenia w czasie. Zakładamy, że graf G nie zawiera cykli.



Wierzchołek p oznacza początek inwestycji, a wierzchołek k koniec inwestycji. Na wierzchołkach grafu określona jest funkcja $a(x)$ 0. Wierzchołki, dla których $a(x)=0$ oznaczono ○ , natomiast wierzchołki $a(x)>0$ oznaczono ◎ .

Na łukach grafu określono trzy funkcje o wartościach nieujemnych

$$\underline{t}(x,y), \qquad \bar{t}(x,y), \qquad c(x,y).$$

Zadanie polega na określeniu dla każdego łuku (x,y) wartości $t(x,y)$, gdzie $\underline{t}(x,y) \leqslant t(x,y) \leqslant \bar{t}(x,y)$ oraz każdego wierzchołka wartości $t(x)$, oznaczającej najdłuższą drogę z p do x mierzoną w jednostkach $t(x,y)$, dla których funkcja

$$f(x,y) = \sum_{x,y} c(x,y)\, t(x,y) + \sum_{x} a(x)\left[\bar{t}(x) - t(x)\right],$$

gdzie:

$\bar{t}(x)$ oznacza najdłuższą drogę z p do x mierzoną w jednostkach $\bar{t}(x,y)$, osiąga maksimum.

Wyżej przedstawiony problem jest uogólnieniem zagadnienia rozwiązanego przez Kelley'a i Walkera [1] [2] [3] dla przypadku, gdy $a(x) = 0$, a więc gdy wykonanie poszczególnych zadań składających się na inwestycję nie przynosi dochodu przed jej ukończeniem.

Wpłynęło do Redakcji w grudniu 1974 r.

LITERATURA

[1] Ford L.R., Fulkerson D.R.: Przepływy w sieciach, PWN, Warszawa 1969.

[2] Kelley J.E., Jr.: Critical Path Planning and Scheduling; Mathematical Basis, Op. Res. 9/1961.

[3] Kelley J.E., Jr. Walker M.R.: Critical Path Planning and Scheduling, Proc. of Eastern Joint Computer Conference, 1959.