ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Andrzej Baranowski
Jerzy Skrzypczyk

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH ASYMPTOTYCZNYCH ROZWIĄZAŃ STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWO-CAŁKOWYCH I CAŁKOWYCH

Streszczenie. W pracy przedyskutowano zagadnienia związane z istnieniem i jednoznacznością rozwiązania równania różniczkowo-całkowego

$$\frac{dx(t,\omega)}{dt} = \varepsilon F(t,x(t,\omega), \int_0^t k(t,s,x(s,\omega),\omega)ds,\omega), \quad t\in[0,T],$$

dla dowolnych, rzeczywistych wartości parametru ε. Następnie poddano analizie rozwiązanie badanego równania różniczkowo-całkowego przy $\varepsilon\to 0$ w przedziale czasu rzędu $O(1/\varepsilon)$ oraz w przedziale nieskończonym.

Dodatkowo pokazano, że podobne wyniki można otrzymać również dla równania całkowego, bez konieczności sprowadzania go do postaci różniczkowo-całkowej.

1. Wstęp

W pracy podane są metody badania własności asymptotycznych pewnej klasy losowych, nieliniowych równań różniczkowo-całkowych i całkowych typu Wolterry, znane w literaturze pod nazwą metod uśredniania równań z małym parametrem.

Metody uśredniania znajdują szerokie zastosowanie w teorii drgań, mechanice, teorii automatycznej regulacji, najogólniej mówiąc w dynamice układów w najszerszym tego słowa znaczeniu. [3,7]. Znajdują one zastosowanie wszędzie tam, gdzie zależy nam aby aproksymować rozwiązanie często bardzo skomplikowanego równania, rozwiązaniem specjalnie utworzonego, dużo prostszego, układu równań różniczkowych, różniczkowo-całkowych lub całkowych.

Rozpatrzymy zachowanie się trajektorii procesów stochastycznych, określonych równaniami:
różniczkowo-całkowym w postaci

$$\frac{dx(t,\omega)}{dt} = \varepsilon F(t,x(t,\omega), \int_0^t k(t,s,x(s,\omega),\omega)ds,\omega) \tag{1}$$

i równaniem całkowym typu Volterry

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \varepsilon \int_0^t h(t,s,x(s,\omega),\omega)ds \tag{2}$$

przy $\varepsilon \to 0$, dla czasów rzędu $O(1/\varepsilon)$.

Rozwiązaniem równania (1) lub (2) będziemy nazywać proces $x(t,\omega)$, który dla każdego $t \in [0,T] \subset R^1_+$ spełnia dane równanie z prawdopodobieństwem 1 (z p. 1).

W przypadku deterministycznym [3,7] rozwiązanie równania (1) może być dla czasów rzędu $O(1/\varepsilon)$, przy dość ogólnych założeniach przybliżone rozwiązaniem równania

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon F_1(x(t)), \tag{3}$$

jeżeli istnieje granica

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t,x,k_1(t,x))dt, \tag{4}$$

jednostajnie po $x \in R^n$,

gdzie

$$k_1(t,x) = \int_0^t k(t,s,x)ds. \tag{5}$$

Jeżeli pole losowe $F(t,s,x,\omega)$ spełnia silne prawo wielkich liczb, to wspomniana granica (4) istnieje i nie zależy od ω. Przy tym założeniu rozwiązanie równania (1) może być jednostajnie przybliżone rozwiązaniem równania (3) dla czasów rzędu $O(1/\varepsilon)$.

Okazuje się, że podobny rezultat zachodzi również w przypadku, gdy

$$\frac{1}{T}\int_0^T F(t,x,k_1(t,x,\omega)\omega)ds \to h_1(t,x)$$

przy $T \to \infty$ tylko według prawdopodobieństwa.
Podobne rozważania są prawdziwe dla równań całkowych [9].

2. Oznaczenia i definicje

W całej pracy obowiązywać będą następujące oznaczenia i założenia:

(i) $\omega\in\Omega$, Ω jest abstrakcyjnym zbiorem zdarzeń elementarnych przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, gdzie $\mathcal{G}$ jest $\mathcal{G}$-ciałem podzbiorów Ω, P - miarą probabilistyczną (unormowaną zupełną) na $\mathcal{G}$;

(ii) $x(t,\omega)$ jest nieznanym procesem stochastycznym;

(iii) $z(t,\omega)$ jest znanym procesem stochastycznym określonym dla $t \geqslant 0$, $\omega\in\Omega$, $\mathfrak{B}\times\mathcal{G}$- mierzalnym, gdzie $\mathfrak{B}\times\mathcal{G}$- $\mathcal{G}$-ciało podzbiorów borelowskich w $[0,T] \times\Omega (T \leqslant \infty)$;

(iv) $F(t,x,y,\omega)$ jest polem losowym określonym na produkcie $R^1_+ x R^n x R^n x \Omega$, dla każdej pary skończonych $x,y \in R^n$ pole jest funkcją $\tilde{\mathfrak{R}}^1_+ x\ \mathcal{G}$- mierzalną ($\tilde{\mathfrak{R}}^1_+ x\,\mathcal{G}$- $\mathcal{G}$- ciało podzbiorów borelowskich w $[0,\infty] x \Omega$), dla każdego skończonego $t\in R^1_+$ jest z p.1 borelowską funkcją x i y,

$$\underset{t\in R^1_+}{\forall} \quad \underset{x,y\in R^n}{\forall} \quad E\left|F(t,x,y,\omega)\right| < \infty,$$

E - oznacza tutaj wartość oczekiwaną zmiennej losowej,

R^n - przestrzeń n-wymiarową z dowolną metryką, dla której przyjmiemy oznaczenie $|\cdot|$, $R^1_+ := [0,\infty)$;

(v) $k(t,s,x,\omega)$ jest polem losowym określonym na $\Delta x R^n x \Omega$, gdzie $\Delta := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$, dla każdego skończonego $x\in R^n$ jest funkcją $\mathfrak{M} \times \mathcal{G}$- mierzalną ($\mathfrak{M}\times\mathcal{G}$-$\mathcal{G}$-ciało podzbiorów borelowskich w $\Delta\times\mathcal{G}$) dla każdej pary uporządkowanej $(t,s)\in\Delta$ jest z p.1 borelowską funkcją x,

$$\underset{t,s\in\Delta}{\forall} \quad \underset{x\in R^n}{\forall} \quad E\left|k(t,s,x,\omega)\right| < \infty;$$

(vi) jądro Volterry $h(t,s,x,\omega)$ jest polem losowym i spełnia takie same założenia jak w punkcie (v);

(vii) ε - parametr rzeczywisty.

Ponadto zawsze wtedy, gdy mówimy o mierzalności rozwiązań $x(t,\omega)$ równań (1-2) względem nieantysypatywnych $\mathcal{G}$- ciał $\mathcal{F}_z$, zakładać będziemy progresywną mierzalność [10] pól losowych: $k(t,s,\cdot,\cdot)$ i $h(t,s,\cdot,\cdot)$ względem $\mathcal{F}_s$ i pola $F(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ względem $\mathcal{F}_z$.

3. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Przedyskutujemy istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (1) w przedziale skończonym i nieskończonym. Rozważania dotyczące równań całkowych pominiemy zakładając, że są znane [1-2, 8-9, 11].

Twierdzenie 1

Przypuśćmy, że są spełnione następujące założenia:

(i) $$\underset{\alpha>0}{\exists}\ \underset{\substack{t\in[0,T]\\ T<\infty}}{\forall}\ \underset{\substack{x_i,y_i\in R^n\\ i=1,2}}{\forall} |F(t,x_1,y_1,\omega) - F(t,x_2,y_2,\omega)| \leqslant \alpha(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|) \text{ z p.1;}$$

$$|F(t,x_1,y_1,\omega)|^2 \leqslant \alpha^2(1+|x_1|^2+|y_1|^2) \text{ z p.1;}$$

(ii) $$\underset{\mu>0}{\exists}\ \underset{\leqslant s\leqslant t\leqslant T}{\forall}\ \underset{x,y\in R^n}{\forall} |k(t,s,x,\omega) - k(t,s,y,\omega)| \leqslant \mu|x-y| \text{ z p.1;}$$

$$|k(t,s,x,\omega)|^2 \leqslant \alpha^2(1+|x|^2) \text{ z p.1;}$$

(iii) $E|x(0,\omega)|^2 < \infty$;

wówczas istnieje rozwiązanie x równania (1) spełniające warunki:

(a) $x(t,\omega)$ jest ciągłe z p.1 i $x(t,\omega) = x(0,\omega)$ dla $t = 0$;

(b) $\sup\limits_{t\in[0,T]} E|x(t,\omega)|^2 < \infty$.

Jeżeli $x_1(t,\omega)$ i $x_2(t,\omega)$ są różnymi rozwiązaniami równania (1) spełniającymi (a) i (b) to

$$P\left\{\omega : \sup_{t\in[0,T]} |x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega)| = 0\right\} = 1.$$

Dowód

Dla uproszczenia, niech $\varepsilon \equiv 1$.

Niech

$$x_i(t,\omega) = x(0,\omega) + \int_0^t F\left(s, x_i(s,\omega), \int_0^s k(s,\tau,x_i(\tau,\omega),\omega)d\tau,\omega\right)ds, \quad i=1,2. \qquad (6)$$

Udowodnimy najpierw jednoznaczność.
Mamy:

$$x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega) = \int_0^t \Big(F\big(s, x_1(s,\omega), \int_0^s k(s,\tau,x_1(\tau,\omega),\omega)d\tau,\omega\big)ds -$$

$$- F\big(s,x_2(s,\omega), \int_0^s k(s,\tau,x_2(\tau,\omega),\omega)d\tau,\omega\big)ds.$$

Wtedy

$$|x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega)| \leqslant \alpha \int_0^t \Big(|x_1(s,\omega) - x_2(s,\omega)| + \mu \int_0^s |x_1(\tau,\omega) -$$

$$- x_2(\tau,\omega)|d\tau\Big)ds \leqslant \alpha(1 + \mu T)\int_0^t |x_1(s,\omega) - x_2(s,\omega)|\, ds,$$

$$E|x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega)|^2 \leqslant \alpha^2 (1 + \mu T)^2\, T^2 \int_0^t E|x_1(s,\omega) - x_2(s,\omega)|^2 ds. \quad (7)$$

Niech

$$\alpha^2 (1 + \mu T)^2\, T^2 = L.$$

Wykorzystując w nierówności (7) lemat 1 [4, s.41], otrzymamy

$$E|x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega)|^2 = 0.$$

Stąd, dla każdego $t \in [0, T]$, $P\{\omega: x_1(t,\omega) = x_2(t,\omega)\} = 1.$

Z ciągłości x_1 i x_2 wynika, że

$$P\Big\{\omega: \sup_{t\in[0,T]} |x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega)| = 0\Big\} = 1.$$

Dowiedliśmy więc jednoznaczności rozwiązania.

Pokażemy teraz, że istnieje rozwiązanie równania (1) spełniające warunki (a) i (b).

Oznaczmy $x_0(t,\omega) = x(0,\omega)$ i

$$x_n(t,\omega) = x(0,\omega) + \int_0^t F\big(s,x_{n-1}(s,\omega), \int_0^s k(s,\tau,x_{n-1}(\tau,\omega)\omega)d\tau,\ \omega\big)ds. \quad (8)$$

Wykorzystując oszacowanie analogiczne do pokazanego w dowodzie jednoznaczności, mamy

$$E\left|x_{n+1}(t,\omega) - x_n(t,\omega)\right|^2 \leqslant L\int_0^t E\left|x_n(s,\omega) - x_{n-1}(s,\omega)\right|^2 ds,$$

gdzie L - oznaczenie jak poprzednio.

Iterując tę nierówność otrzymamy

$$E\left|x_{n+1}(t,\omega) - x_n(t,\omega)\right|^2 \leqslant L\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} E\left|x_1(s,\omega) - x_0(s,\omega)\right|^2 ds,$$

ale

$$E\left|x(t,\omega) - x_0(t,\omega)\right|^2 \leqslant E\left(\int_0^t \left|F(s,x(0,\omega), \int_0^s k(s,\tau,x(0,\omega),\omega)d\tau,\omega)\right| ds\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant T^2 \alpha^2 (1 + E\left|x(0,\omega)\right|^2 + \mu^2 T^2 E\left|x(0,\omega)\right|^2) < \infty .$$

Istnieje więc stała C taka, że

$$E\left|x_{n+1}(t,\omega) - x_n(t,\omega)\right|^2 \leqslant C\,\frac{(LT)^n}{n!} . \tag{9}$$

Z nierówności (9) oraz ze znanego twierdzenia [4, s.43] wynika, że wyrażenie

$$x(0,\omega) + \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1}(t,\omega) - x_n(t,\omega)), \tag{10}$$

jest jednostajnie zbieżne z p.1 oraz, że suma (10) jest zbieżna do pewnego procesu stochastycznego $x(t,\omega)$, który jest rozwiązaniem równania (1).

Ciągłość $x(t,\omega)$ wynika stąd, że jest równy z p.1 jednostajnej granicy procesów ciągłych.

Uwaga 1

Łatwo zauważyć, że twierdzenie 1 może być uogólnione przy osłabieniu warunków (i) i (ii):

(i)' $\forall_{t\in[0,T]} \; E\left|F(t,0,0,\omega)\right|^2 < \infty;$

(ii)' $\forall_{0<s\leq t\leq T} E|k(t,s,0,\omega)|^2 < \infty.$

Z warunków (i)' i (ii)' wynika następująca nierówność:

$$\exists_{\alpha>0} \forall_{t\in[0,T]} E|F(t,x(t,\omega),\ y(t,\omega),\omega)|^2 \leq \alpha^2(1 + E|x\ (t,\omega)|^2 + E|y(t,\omega)|^2)$$

oraz

$$\exists_{\alpha>0} \forall_{t\in[0,T]} E|k(t,s,x(t,\omega),\omega)|^2 \leq \alpha^2(1 + E|x(t,\omega)|^2)$$

dla $x,y \in \mathfrak{L}^2[0,T]$, [1].

Uwaga 2

Łatwo zauważyć, że z progresywnej mierzalności pól losowych F i k wynika progresywna mierzalność rozwiązania równania (1).

Uwaga 3

Można wykazać, że analogicznie jak w [10], istnienie rozwiązania równania (1) również bez założenia (iii). Rozważania te mają jedynie charakter przyczynkowy i dlatego zostaną pominięte.

W dalszym ciągu rozważymy zadanie Cauchy'ego dla równania (1), kiedy warunek początkowy ma postać:

$$x(t_o,\omega) = x_o(\omega) \quad t_o>0. \tag{11}$$

Układ równań (1) przy warunku (11) może posiadać niejednoznaczne rozwiązanie, tzn. punkt t_o może być tzw. punktem osobliwym układu(1) $\wedge$ (11). Dokładniej mówiąc powiemy, że równanie (1) nie będzie posiadało punktów osobliwych, jeżeli $\forall\ t_o\in(0,T)$, $T\leq\infty$ i przy dowolnym $x_o(E|x_o(\omega)|^2<\infty$, równanie (1) posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Dalej będziemy uważać, że $x(t)\equiv x_o$ dla $t\leq t_o$.

Twierdzenie 2

Przypuśćmy, że są spełnione warunki:

(i) istnieje mierzalna funkcja nieujemna $\lambda(t)$, $t\geq0$, taka, że

$$\forall_{t\geq0} \forall_{\substack{x_i,\ y_i\in R^n\\ i=1,2}} |F(t,x_1,y_1,\omega) - F(t,x_2,y_2,\omega)| \leq \lambda(t)(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|) \text{ z p.1}$$

(ii) istnieje mierzalna, nieujemna funkcja $\mu(t,s)$, określona dla $(t,s)\in\Delta$ spełniająca relację

$$\forall_{(t,s)\in\Delta}\ \ \forall_{x,y\in R^n}\ |k(t,s,x,\omega) - k(t,s,y,\omega)| \leq \mu(t,s)\ |x-y| \quad \text{z p.1;}$$

(iii) $\varepsilon\int_0^\infty \lambda(\tau)\left[1 + \int_0^\tau \mu(\tau,s)ds\right] d\tau = q<1;$

(iv) $\int_0^\infty (E\left|F(\tau,0,\int_0^\tau k(\tau,s,0,\omega)ds,\omega)\right|^2)^{1/2} d\tau\leq P<\infty.$

Wówczas równanie (1) nie posiada punktów osobliwych.

Dowód

Oznaczmy przez $\mathcal{E}^2[t_o,\infty)$ przestrzeń procesów stochastycznych rzędu drugiego, $\mathcal{G}$ - mierzalnych z normą

$$\|x(t,\omega)\|_2 = \sup_{t\in[t_o,\infty)} E|x(t,\omega)|^2)^{1/2}, \quad \|x(t,\omega)\| = (E|x(t,\omega)|^2)^{1/2},$$

gdzie $t_o\geq 0$.

Jest znanym faktem, że $\mathcal{E}^2$ jest to przestrzeń Banacha.
Pokażemy, że operator A zdefiniowany następująco:

$$A:\ (Ax)(t,\omega) = x_o(\omega) + \varepsilon\int_{t_o}^t E(t,x(s,\omega),\int_0^s k(s,\tau,x(\tau,\omega),\omega)d\tau,\omega)ds, \tag{12}$$

przekształca $\mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ i jest w tej przestrzeni zwężający.

Zauważmy, że każde rozwiązanie równania (1) spełniające warunek (11) przy dowolnym $t_o>0$ i $x_o\in\mathcal{E}^2$ jest ograniczone w tej przestrzeni. Wynika to bezpośrednio z założeń

$$|x(t,\omega)| \leq |x_o(\omega)| + \varepsilon\int_{t_o}^t \left|F(\tau,0,\int_0^\tau k(\ ,s,0,\omega)ds,\omega)\right| d\tau +$$
$$+ \varepsilon\int_{t_o}^t \left[\lambda(\tau)(|x(\tau,\omega)| + \int_0^\tau \mu(\tau,s)\ |x(s,\omega)|ds)\right] d\tau. \tag{13}$$

Z (13) na podstawie lematu 1.7 [3, s. 80] wynika następujące oszacowanie:

$$|x(t,\omega)| \leqslant (\varepsilon P + |x_0|)\, e^{\varepsilon q} < \infty .$$

Wykażemy teraz, że A jest operatorem zwężającym. Niech $x,y \in \mathcal{E}^2$

$$\|Ax(t,\omega) - Ay(t,\omega)\|_2 \leqslant \sup_{t\in[0,\infty)} \varepsilon \int_0^t (s)\Big[\|x(s,\omega) - y(s,\omega)\| +$$

$$+ \int_0^s \mu(s,\tau)\, \|x(\tau,\omega) - y(\tau,\omega)\|\, d\tau\Big] ds \leqslant \varepsilon q\, \|x(t,\omega) - y(t,\omega)\|_2 . \qquad (14)$$

Reszta wynika z twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

Uwaga

Założenia twierdzenia można osłabić, np. można wymagać tylko lokalnego warunku Lipschitza dla funkcji nieliniowej. Rozważania te pomijamy.

4. Metody uśredniania w równaniach różniczkowo-całkowych

Zajmiemy się teraz równaniem różniczkowo-całkowym z małym parametrem (1) i założymy, że jego rozwiązanie istnieje i jest określone dla $t \geqslant 0$. Oznaczymy

$$k_1(t,x,\omega) = \int_0^t k(t,s,x,\omega)\,ds . \qquad (15)$$

Twierdzenie 3

Przypuśćmy, że są spełnione następujące założenia:

(i) istnieje funkcja deterministyczna $F_1(x)$, $x \in R^n$ taka, że

$$\lim_{T\to\infty} E \sup_{x\in R^n} \left|\frac{1}{T}\int_0^T F(t,x,k_1(t,x,\omega)\omega)dt - F_1(x)\right|^2 = 0 \qquad (16)$$

(ii) $\underset{\lambda\in R_+^1}{\exists}\ \underset{t\in R_+^1}{\forall}\ \underset{\substack{x',y'\in R^n\\ x'',y''\in R^n}}{\forall} |F(t,x',y',\omega) - F(t,x'',y'',\omega)| \leqslant \lambda(|x'-x''| + |y'-y''|$ z p.1;

gdzie $|\cdot|$ oznacza normę wektora w przestrzeni n-wymiarowej

(iii) istnieje mierzalna, nieujemna funkcja $\mu(t,s)$, taka, że prawdziwa jest relacja

$$\forall_{(t,s)\in\Delta}\ \forall_{x',x''\in R^n} \left|k(t,s,x',\omega) - k(t,s,x'',\omega)\right| \leqslant \mu(t,s)\left|x' - x''\right| \text{ z p.1;}$$

(iv) $\frac{1}{t}\int_0^t \int_0^\tau \mu(\tau,s)ds\, d\tau \to 0$ przy $t\to\infty$;

(v) $\exists_{M<\infty}\ \forall_{x\in R^n} |F_1(x)| \leqslant M$;

(vi) $\exists_{\nu\in R_+^1}\ \forall_{x',x''R^n} |F_1(x') - F_1(x'')| \leqslant \nu|x' - x''|$;

(vii) rozwiązanie ξ równania różniczkowego

$$\frac{d\xi(t,\omega)}{dt} = \varepsilon F_1(\xi(t,\omega), \quad \xi(0) = x(0,\omega) \tag{17}$$

istnieje, jest określone dla $t\geqslant 0$ i jest procesem stochastycznym rzędu drugiego.

Wówczas

$$\forall_{\eta>0}\ \forall_{L>0}\ \exists_{\varepsilon_0>0}\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0 \Rightarrow \forall_{0\leqslant t\leqslant L\varepsilon^{-1}} E\left|x(t,\omega)-\xi(t,\omega)\right|^2 < \eta. \tag{18}$$

Dowód

Dokonajmy formalnych przekształceń na równaniach (1) i (7)

$$\begin{aligned} x(t,\omega) - \xi(t,\omega) &= \varepsilon\int_0^t \Big[F(\tau,x(\tau,\omega), \int_0^\tau k(\tau,s,x(s,\omega),\omega)ds,\omega) - \\ &\quad - F(\tau, \xi(\tau,\omega), \int_0^\tau k(\tau,s,\xi(s,\omega),\omega)ds,\omega)\, d\tau + \\ &\quad + \varepsilon\int_0^t \Big[F(\tau, \xi(\tau,\omega), \int_0^\tau k(\tau,s,\xi(s,\omega),\omega)ds,\omega) - \\ &\quad - F(\tau, \xi(\tau,\omega), \int_0^\tau k(\tau,s,\xi(\tau,\omega),\omega)ds,\omega)\Big]d\tau + \\ &\quad + \varepsilon\int_0^t \Big[F(\tau, \xi(\tau,\omega), \int_0^\tau k(\tau, s, \xi(\tau,\omega),\omega)ds,\omega) - \\ &\quad - F_1(\xi(\tau,\omega))\Big]d\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

Ocenimy poszczególne składniki występujące po prawej stronie równana (19). Wprowadzimy oznaczenia:

$$F(\tau,\xi(\tau,\omega),\int_0^\tau k(\tau,s,\xi(\tau,\omega),\omega)ds,\omega) = F(\tau,\xi(\tau,\omega)k_1(\tau,\xi(\tau,\omega),\omega),\omega)$$

$$= F_2(\tau,\xi(\tau,\omega),\omega),$$

$$F_2(\tau,\xi(\tau,\omega),\omega) - F_1(\xi(\tau,\omega)) = f(\tau,\xi(\tau,\omega),\omega).$$

Ostatni składnik sumy (19) można oszacować w następujący sposób:

$$\varepsilon\int_0^t \left[F(\tau,\xi(\tau,\omega),\int_0^\tau k(\tau,s,\xi(\tau,\omega),\omega)ds,\omega) - F_1(\xi(\tau,\omega))\right] d\tau =$$

$$= \varepsilon\int_0^t f(\tau,\xi(\tau,\omega),\omega)\, d\tau. \qquad (2)$$

Z założeń (ii-iii) wynika, że F_2 spełnia warunek Lipschitza:

$$|F_2(\tau,\xi',\omega) - F_2(\tau,\xi'',\omega)| \leq \lambda(|\xi'-\xi''| + |k_1(\tau,\xi',\omega) - k_1(\tau,\xi'',\omega)|) \leq$$

$$\leq \lambda(|\xi'-\xi''| + \int_0^\tau \mu(\tau,s)|\xi'-\xi''|\, ds) = \lambda(1 + \int_0^\tau \mu(\tau,s)ds)\,|\xi'-\xi''| =$$

$$= \lambda(1 + \mu_1(\tau))\,|\xi'-\xi''|, \qquad (2\ )$$

gdzie $\mu_1(\tau) = \int_0^\tau \mu(\tau,s)ds.$

Zauważmy, że z (iv) wynika

$$\overline{\mu}_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \mu_1(\tau)ds \to 0 \quad \text{przy} \quad t\to\infty.$$

Podobnie funkcja losowa f spełnia warunek Lipschitza ze stałą, która wynika z nierówności (21) i założenia (vi):

$$|f(\tau,\xi',\omega) - f(\tau,\xi'',\omega)| \leq (\lambda+\nu+\lambda\mu_1(\tau))\,|\xi'-\xi''|.$$

Pokażmy dalej, że

$$\underset{a>0}{\forall}\quad \underset{L>0}{\forall}\quad \underset{\varepsilon_1>0}{\exists}\quad \varepsilon<\varepsilon_1 \Rightarrow \underset{0\leq t\leq L\varepsilon^{-1}}{\forall} \varepsilon\left\|\int_0^t f(\tau, \xi(\tau,\omega),\omega)d\tau\right\| < a. \tag{22}$$

Dokonujmy podziału odcinka I: = $\left\{t: 0\leq t\leq L_\varepsilon{}^{-1}\right\}$ na m części punktami

$$t = 0,\ T = \frac{L}{\varepsilon m}, \dots\dots\dots,\ t_m = L_\varepsilon{}^{-1}.$$

Mamy:

$$\left\|\varepsilon\int_0^t f(\tau, \xi(\tau,\omega),\omega)d\tau\right\| \leq \left\|\varepsilon\sum_{i=1}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[f(\tau,\xi(\tau,\omega),\omega) - f(\tau,\xi_i,\omega)\right]d\tau\right\| +$$

$$+\left\|\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{i=0}^{t_{i+1}} f(\tau, \xi_i,\omega)d\tau\right\|, \tag{23}$$

gdzie: $\xi_i = \xi(t_i,\omega)$.

Oceńmy pierwszy składnik prawej strony nierówności (23):

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[f(\tau, \xi(\tau,\omega),\omega) - f(\tau, \xi_i,\omega)\right] d\tau\| \leq \varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\lambda+\nu+\lambda\mu_1(\tau))|$$

$$\|\xi(\tau,\omega) - \xi_i|d\tau \leq \varepsilon^2 M\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[(\lambda+\nu)|\tau - t_i| + \lambda\mu_1(\tau)|\tau - t_i|\right] d\tau \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 M\sum_{i=0}^{m-1}(t_{i+1} - t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\lambda+\nu+\lambda\mu_1(\tau)\right] d\tau = \frac{ML^2}{2m}(\lambda+\nu) +$$

$$+\frac{\varepsilon\lambda_{ML}}{m}\int_0^{L/\varepsilon}\mu_1(\tau)d\tau = \alpha(m,\varepsilon).$$

Zauważmy, że

$$\varepsilon\int_0^t \mu_1(\tau)d\tau = \varepsilon\, t\, \bar{\mu}_1(t) \leq \sup_{0\leq\tau\leq L}\tau\bar{\mu}_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \delta(\varepsilon).$$

Oczywiste jest, że $\delta(\varepsilon)\to 0$ przy $\varepsilon\to 0$ (założenie iv). Stąd łatwo wynika, że $\alpha(m,\varepsilon)\to 0$ przy $m\to\infty$.

Drugi składnik prawej strony nierówności (19) ocenimy w sposób następujący:

$$\left|\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau,\xi_i,\omega)d\tau\right|\leqslant\varepsilon\left|\int_0^{t_1} f(\tau,\xi_0,\omega)d\tau\right|$$

$$+\varepsilon\left|\int_0^{t_2} f(\tau,\xi_1,\omega)d\tau-\int_0^{t_1} f(\tau,\xi_1,\omega)d\tau\right|+$$

....

$$+\varepsilon\left|\int_0^{L/\varepsilon} f(\tau,\xi_{m-1},\omega)d\tau-\int_0^{t_{m-1}} f(\tau,\xi_{m-1},\omega)d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\left(\left|\int_0^{t_{i+1}} f(\tau,\xi_i,\omega)d\tau\right|+\left|\int_0^{t_i} f(\tau,\xi_i,\omega)d\tau\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant L\sum_{i=0}^{m-1}\left|\frac{\varepsilon m}{(i+1)L}\int^{\frac{(i+1)L}{\varepsilon m}} F(\tau,\xi_i,k_1(\tau,\xi_i,\omega),\omega)ds-F_1(\xi_i)\right|+$$

$$+L\sum_{i=0}^{m-1}\left|\frac{\varepsilon m}{\lambda L}\int_0^{\frac{iL}{\varepsilon m}} F(\tau,\xi_i,k_1(\tau,\xi_i,\omega),\omega)ds-F_1(\xi_i)\right|. \tag{24}$$

Na podstawie założenia (i) przez wybór ε i m możemy pokazać prawdziwość nierówności (22).

Pierwsze dwa składniki prawej strony równania (19) można oszacować w prosty sposób korzystając z założeń (ii-iii).

$$\left|\varepsilon\int_0^t\left[F\left(\tau,x(\tau,\omega),\int_0^\tau k(\tau,s,x(s,\omega),\omega)ds,\omega\right)-F\left(\tau,\xi(\tau,\omega),\int_0^\tau\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.k(\tau,s,\xi(s,\omega),\omega)ds,\omega\right)\right]d\tau\right|\leqslant\varepsilon\int_0^t\lambda\left[|x(\tau,\omega)-\xi(\tau,\omega)|+\int_0^\tau\mu(\tau,s)|x(s,\omega)-\right.$$

$$\left.-\xi(s,\omega)|\,ds\right]d\tau \tag{25}$$

$$\varepsilon\left|\int_0^t\left[F\left(\tau,\xi(\tau,\omega),\int_0^\tau k(\tau,s,\xi(s,\omega),\omega)ds,\omega\right)-F\left(\tau,\xi(\tau),\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\int_0^\tau k(\tau,s,\xi(\tau,\omega),\omega)ds,\omega\right)\right]d\tau\right|\leqslant\varepsilon\lambda\int_0^t\int_0^\tau\mu(\tau,s)\,|\xi(\tau,\omega)-\xi(s,\omega)|\,ds\,d\tau.$$

(26)

Na podstawie nierówności (22) i (25-26) możemy napisać

$$\|x(t,\omega) - \xi(t)\| \leqslant a + \varepsilon\lambda\int_0^t\int_0^\tau \mu(\tau,s)\|\xi(\tau) - \xi(s)\| \, ds d\tau +$$

$$+ \varepsilon\lambda\int_0^t \|x(\tau,\omega) - \xi(\tau)\| \, d\tau + \varepsilon\lambda\int_0^t\int_0^\tau \mu(\tau,s)\|x(s,\omega) - \xi(s)\| \, ds \, d\tau.$$

Na podstawie lematu 1,7 [3, s.80] i mierzalności funkcji w nierówności (23) słuszna jest relacja

$$\|x(\tau,\omega) - \xi(t)\| \leqslant [a + \lambda ML\delta(\varepsilon)] \exp(\lambda L + \lambda\delta(\varepsilon)).$$

Kładąc $a + \lambda ML\delta(\varepsilon) < e^{-\lambda(1+L)}\eta$ co możemy uczynić ze względu na zbieżność a i $\delta(\varepsilon)$ do zera, otrzymamy tezę twierdzenia.

Zachowując sposób rozumowania jak w dowodzie twierdzenia 3 można uzyskać pewne osłabienie jego założeń.

Twierdzenie 3'

Przypuśćmy, że istnieje rozwiązanie równania (1) będące procesem rzędu drugiego i są spełnione założenia (i) i (iv-vii) twierdzenia 3. Jeżeli ponadto:

(ii)' $$\underset{\lambda\in R_+^1}{\exists}\ \underset{t\in R_+^1}{\forall}\ \underset{\substack{x(t,\omega),\,y(t,\omega)\\ x''(t,\omega),\,y''(t,\omega)'\in \mathcal{E}^2[0,\infty)}}{\forall} \|F(t,x'(t,\omega),y'(t,\omega),\omega) -$$

$$- F(t,x''(t,\omega),y(t,\omega),\omega)\| \leqslant \lambda(\|x'(t,\omega) - x''(t,\omega)\| + \|y''(t,\omega) + y''(t,\omega)\|$$

(iii)' istnieje mierzalna, nieujemna funkcja $\mu(t,s)$, taka, że spełniona jest relacja:

$$\underset{(t,s)\in\Delta}{\forall}\ \underset{x'(t,\omega),\ x''(t,\omega)\in \mathcal{E}^2[0,\infty)}{\forall} \|k(t,s,x'(t,\omega),\omega) - k(t,s,x''(t,\omega)\omega)\| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(t,s)\|x'(t,\omega) - x''(t,\omega)\| \ ;$$

to wówczas teza twierdzenia 3 pozostaje prawdziwa.

Przy dowodzeniu należy zwrócić uwagę na moment, w którym wykorzystuje się elementarne własności całki Bochnera [22].

Samo osłabienie założeń może wydawać się mało istotne, ale zwróćmy uwagę na pewien fakt.

Wniosek

Przypuśćmy, że rozwiązanie równania (10) istnieje, jest procesem stochastycznym rzędu drugiego i jest $\mathcal{F}_z$ - mierzalne. Warunki wystarczające istnienia i jednoznaczności podane są np. w twierdzeniu 1.

Jeżeli pola losowe $F(t,x,y,\omega)$ i $k(t,s,x,\omega)$ są progresywnie odpowiednio $\mathcal{F}_t$ i $\mathcal{F}_s$ mierzalne [10] i prawdziwe są relacje:

(ii)" $$\exists_{\lambda\in R_+^1}\ \forall_{t\in R_+^1}\ \forall_{x',x'',y',y''\in R^n} E\left\{\left|F(t,x',y',\omega)-F(t,x'',y'',\omega)\right| /\mathcal{F}_z\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(|x'-x''|+|y'-y''|);$$

(iii)" istnieje mierzalna, nieujemna funkcja $\mu(t,s)$, taka, że spełniona jest relacja:

$$\forall_{(t,s)\in\Delta}\ \forall_{x',x''\in R^n} E\left\{\left|k(t,s,x',\omega)-k(t,s,x'',\omega)\right| /\mathcal{F}_s\right\}\leqslant\mu(t,x)\left|x'-x''\right|;$$

to prawdziwe są warunki (ii)' i (iii)'. Ten fakt stanowi nietrywialne wzmocnienie założeń twierdzenia 3.

Możliwe jest również osłabienie założeń (i) i (iii) w następujący sposób.

Twierdzenie 3"

Przypuśćmy, że spełnione są założenia (ii) i (v-vii)twierdzenia 3. Jeżeli ponadto:

(i)''' $$P-\lim_{T\to\infty}\sup_{x\in R^n}\left|\frac{1}{T}\int_0^T F(t,x,k_1(t,x,\omega),\omega)dt-F_1(x)\right|=0;$$

(iii)" istnieje mierzalny, nieujemny proces stochastyczny $\mu(t,s,\omega)$, taki, że prawdziwa jest relacja:

$$\forall_{(t,s)\in\Delta}\ \forall_{x',x''\in R^n}\left|k(t,s,x',\omega)-k(t,s,x'',\omega)\right|\leqslant\mu(t,s,\omega)\left|x'-x''\right| \quad \text{z p.1;}$$

(iv) $$P-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^{\tau}\mu(\tau,s,\omega)\,ds\,d\tau=0$$

to

$$\forall_{\eta>0}\ \forall_{\beta>0}\ \forall_{L>0}\ \exists_{\varepsilon_0>0}\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0 \Rightarrow \forall_{0\leqslant t\leqslant L_\varepsilon^{-1}} P\left\{\omega: \left|x(t,\omega)-\hat{S}(t)\right|>\eta\right\}<\beta.$$

Często zdarza się, że wymagana jest bliskość rozwiązań równania wyjściowego (1) i równania uśrednionego (17) na przedziale większym, niż $[0, L\varepsilon^{-1}]$, Okazuje się, że można sformułować warunki, które zapewnią nam, że rozwiązania równań (1) i 17) będą bliskie na przedziale nieskończonym. Temu problemowi poświęcimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4

Przypuśćmy, że są spełnione założenia twierdzenia 3 i ponadto:

(i) równanie (1) nie posiada punktów osobliwych

(ii) rozwiązanie równania różniczkowego (17) jest jednostajnie średnio asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa

(iii) jednostajnie po $t_0 \geqslant 0$ istnieje granica

$$\lim_{T\to\infty} E\left|\sup_{x\in R^n} \int_{t_0}^{t_0+T} F\left(t,x,\int_0^t k(t,s,x,\omega)ds,\omega\right)dt - F_1(x)\right|^2 = 0;$$

(iv) $\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} \mu(\tau,s)ds\,d\tau \to 0$, przy $t\to\infty$, jednostajnie po t_0.

Wówczas:

$$\forall_{\eta>0} \; \exists_{\varepsilon_0>0} \quad \varepsilon<\varepsilon_0 \Rightarrow \bigvee_{t\geqslant 0} E\left|x(t,\omega) - \xi(t,\omega)\right|^2 < \eta,$$

gdzie: $x(t,\omega)$ i $\xi(t,\omega)$ - odpowiednio rozwiązania równań (1) i (17).

Dowód

Równanie (1) nie posiada punktów osobliwych i w każdym przedziale $[t_0, t_0 + L\varepsilon^{-1}]$ rozwiązania równań (1) i (17) są dowolnie bliskie przy małym ε.

Na mocy jednostajnej średniej (z potęgą 2) stabilności typu Lapunowa

$$\forall_{\eta/2>0} \; \exists_{\varrho<\eta} \; \forall_{t_1>0} \; \|\xi(t_1,\omega) - \xi_0(t_1\omega)\| \leqslant \varrho \Rightarrow \forall_{t>t_1} \|\xi(t,\omega) - \xi_0(t,\omega)\| < \eta/2, \tag{27}$$

gdzie $\xi_0(t,\omega)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania (17), przy $\varepsilon\in[0,\varepsilon^*]$. Z własności asymptotycznych stabilności wynika:

$$\exists_{L_1>0} \quad t>t_1 + L_1/\varepsilon^* \Rightarrow \|\xi(t,\omega) - \xi_0(t,\omega)\| < \varrho/2. \tag{28}$$

Dla tak określonych: ϱ i L_1 wybierzmy $\varepsilon_0 < \varepsilon^*$, tak, aby

$$\forall_{t\in[0,\ L_1\varepsilon^{-1}]}\ \forall_{\varepsilon<\varepsilon_0}\ \|x(t,\omega) - \xi(t,\omega)\| < \varrho. \tag{29}$$

Przypuśćmy, że nierówność $\|x(t,\omega) - \xi(t,\omega)\| < \eta$ nie zachodzi dla wszystkich $t \in (0, \infty)$.
Niech

$$t' = \inf\left\{t:\ t > 0,\ \|x(t,\omega) - \xi(t,\omega)\| \geqslant \eta\right\}. \tag{30}$$

Oczywiście taka chwila istnieje i $t' > L_1\varepsilon^{-1}$, co wynika z poprzednich rozważań. Dla $t < t'$ będzie zachodzić nierówność

$$\|x(t,\omega) - \xi(t,\omega)\| < \eta$$

tzn. t' będzie pierwszym czasem wyjścia na brzeg obszaru będącego kulą o promieniu η przez funkcję $\|x - \xi\|$.
Niech

$$t'' = \sup\left\{t:\ t\in[L_1\varepsilon^{-1},\ t'),\ \|x(t,\omega) - \xi(t,\omega)\| \leqslant \varrho\right\} \tag{31}$$

w tym przypadku dla $t > t''$, $\|x(t,\omega) - \xi(t,\omega)\| > \varrho$. (32)

Niech $\xi_0(t,\omega)$ oznacza od tej chwili rozwiązanie równania różniczkowego (17) z warunkiem początkowym $\xi_0(t = x(t'')$.
Zatem:

$$\|x(t'',\omega) - \xi(t'',\omega)\| = \|\xi_0(t'',\omega) - \xi(t'',\omega)\| \leqslant \varrho. \tag{33}$$

Ponadto, jeżeli weźmiemy $t_1 = t''$, otrzymamy na podstawie przeprowadzonego uprzednio rozumowania (27-27)

$$\|\xi(t,\omega) - \xi_0(t,\omega)\| < \eta/2, \quad \text{dla} \quad t > t'' \tag{34}$$

$$\|\xi(t,\omega) - \xi_0(t,\omega)\| < \varrho/2, \quad \text{dla} \quad t > t'' + L_1\varepsilon^*. \tag{35}$$

Wybierzmy tak $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ aby w przedziale $[t'',\ t'' + L_1\varepsilon_1^{-1}]$ zachodziło oszacowanie

$$\|x(t,\omega) - \xi_0(t,\omega)\| < \varrho/2, \quad x(t'',\omega) = \xi_0(t'',\omega). \tag{36}$$

Taką możliwość gwarantują nam założenia twierdzenia (iii-iv). Wiemy jednocześnie, że z (34) i (36) możemy uzyskać relację

$$\|x(t,\omega)-\xi(t,\omega)\| \leqslant \|x(t,\omega) - \xi_0(t,\omega)\| + \|\xi_0(t,\omega) - \xi(t,\omega)\| < \varrho/2+ \eta/2 < \eta . \tag{37}$$

Stąd:

$$t'' + L_1/\varepsilon_1 < t' .$$

Dalej mamy

$$\|x(t'' + L_1/\varepsilon_1) - \xi(t'' + L_1/\varepsilon_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x(t'' + L_1/\varepsilon_1) - \xi_0(t''+ L_1/\varepsilon_1)\| + \|\xi_0(t''+ L_1/\varepsilon_1) - \xi(t''+ L_1/\varepsilon_1)\| < \varrho/2 + \varrho/2 = \varrho \tag{38}$$

na mocy (35-36) co wynika z faktu, że $t = t'' + L_1/\varepsilon_1 > t'' + L_1/\varepsilon^*$. Sprzeczność relacji (32) i (38) kończy dowód.

W dowodzie oparliśmy się na rozumowaniu zaproponowanym przez C. Banfi [3].

5. Uśrednienie w równaniach całkowych

Analizę asymptotycznych własności rozwiązań równań całkowych można przeprowadzić bezpośrednio lub przez sprowadzenie równania wyjściowego do postaci różniczkowo-całkowej.

Weźmy pod uwagę równanie całkowe Volterry II-rodzaju z małym parametrem.

$$x(t,\omega) = \varepsilon z(t,\omega) + \varepsilon \int_0^t h(t,s,x(s,\omega),\omega)ds, \tag{39}$$

gdzie $\varepsilon > 0$. Przy założeniu różniczkowalności (w dowolnym sensie) względem t procesu $z(t,\omega)$ i pola $h(t,\cdot,\cdot,\omega)$ otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\left[\frac{dz}{dt} + h(t,s,x(s,\omega),\omega)\right] + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial h(t,s,x(s,\omega),\omega)}{\partial t}\, ds. \tag{40}$$

Równanie (40) jest szczególnym przypadkiem równania (1) i w związku z tym uśrednianie można dalej przeprowadzić w podany sposób.

Interesujący wydaje się problem, czy można bezpośrednio w równaniu(40) przeprowadzić operację analogiczną do uśredniania.
Poniższe twierdzenie jest odpowiedzią na tak sformułowane zagadnienie.

Twierdzenie 5

Rozpatrzmy równanie całkowe Volterry z małym parametrem.

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \varepsilon\int_0^t h(t,s,x(s,\omega),\omega)ds, \quad t \geq 0. \tag{41}$$

Jeżeli spełnione są założenia:

(i) istnieje mierzalna funkcja deterministyczna $h_1(t,x)$ określona dla $t \in R_+^1$, $x \in R^n$ i będąca dla każdego skończonego t funkcją borelowską x spełniającą relację

$$\lim_{T\to\infty} E\left|\sup_{x\in R^n} \frac{1}{T}\int_0^T h(t,s,x,\omega)ds - h_1(t,x)\right|^2 = 0; \tag{42}$$

(ii) $\exists_{M<\infty} \ \forall_{t\in R_+^1} \ \forall_{x\in R^n} \ |h_1(t,x)| \leq M;$

(iii) $\exists_{\mu<\infty} \ \forall_{x,y\in R^n} \ \forall_{t\in R_+^1} \ |h_1(t,x) - h_1(t,y)| \leq \mu|x-y|;$

(iv) $z(t,\omega) \in \mathcal{E}^2[0,\infty)$ i jest ciągłym w sensie średnim z drugą potęgą procesem stochastycznym;

(v) rozwiązanie ξ równania uśrednionego

$$\xi(t,\omega) = z(t,\omega) + \varepsilon\int_0^t h_1(t, \xi(s,\omega))ds \tag{43}$$

jest określone dla $t \in R_+^1$ i jest procesem stochastycznym rzędu drugiego;

wówczas

$$\forall_{\eta>0} \ \forall_{L>0} \ \exists_{\varepsilon_0>0} \ 0<\varepsilon<\varepsilon_0 \Rightarrow \forall_{0\leq t\leq L\varepsilon^{-1}} E|x(t,\omega)-\xi(t,\omega)|^2 < \eta.$$

Dowód

Jest podobny do dowodu twierdzenia 3 i dlatego szczegółowe rozważania pominiemy [9].

Możliwe jest uzyskanie wyniku, podobnego do zawartego w twierdzeniu 4 dotyczącego uśredniania w przedziale nieskończonym. Rozważania takie można przeprowadzić bez trudności, dlatego ograniczymy się jedynie do zasygnalizowania problemu.

Uwagi końcowe

Nasze wyniki uogólniają znane i szeroko rozpowszechnione w zastosowaniach technicznych rezultaty teorii deterministycznej [3,7]. Analogiczne badania dla równań różniczkowych z małym parametrem prowadził HASMINSKI [6,7]. Dotyczyły one uśredniania w losowych równaniach różniczkowych w skończonym przedziale czasu i stanowią szczególny przypadek rozważań zawartych w twierdzeniu 5. Jak się wydaje, badania dotyczące tematyki uśredniania w losowych równaniach różniczkowo-całkowych i całkowych nie były do tej pory publikowane.

LITERATURA

[1] Ahmed N.U.: A class of stochastic nonlinear integral equations on L^p spaces and its application to optimal control, Information and Control, 1969, Vol. 14, No 6, 512-523.

[2] Bharucha-Reid A.T.: Random Integral Equations, Academic Press, New York and London, 1972.

[3] Fiłatow A.N.: Mietody usriednienija w diffieriencialnych i intiegro-diffieriencialnych urawnienijach, Izd. FAN, Taszkient, 1971.

[4] Gihman I.I., Skorohod A.V.: Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972.

[5] Hasminskij R.Z.: O słuczajnych prociëssach, opriedieliajemych diffieriencialnymi urawnienijami s małym paramietrom Tieoria Wier. i jejo Prim., 1966, 11, No 2, 240-259.

[6] Hasminskij R.Z.: Priedielnaja tieoriema dlia rieszenija diffieriencialnych urawnienij so słuczajnoj prawoj czastiu Tieoria Wier. i jejo Prim., 1966, 11, No 3, 444-462.

[7] Mitropolskij Ju.A.: Mietod usriednienija w nieliniejnoj miechanikie, Naukowa Dumka, Kijew, 1971.

[8] Shirjajew: Statistika słuczajnych processow Izd. Nauka, Moskwa, 1974.

[9] Skrzypczyk J.: L^p_m - stabilność w sensie średnim nieliniowego stochastycznego równania całkowego, Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Automatyka, Gliwice, 1974.

[10] Skrzypczyk J.: Stabilność stochastycznych równań całkowych. Praca doktorska (maszynopis), Pol. Śl.

[11] Tsokos Chris P., Padgett W.J.: Random integral equations with applications to stochastic systems, (Lect. Not. Math. 233), Berlin e.a., Springer, 1971, VII,

[12] Yosida K.: Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg--New York, 1966.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

Рассмотрены проблемы существования и однозначности решения случайного интегро-дифференциального уравнения вида Вольтерры с малым параметром ε.

Рассмотрены асимптотические свойства решения при $\varepsilon \to 0$, в интервале времени $O(1/\varepsilon)$ и когда интервал времени бесконечный.

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF STOCHASTIC INTEGRO-DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper we consider the existence and uniqueness of solutions to random integro-differential equations of the Volterra type with a small parameter ε.

The asymptotic properties of the solution are descussed if $\varepsilon \to 0$ in a time interval of the $O(1/\varepsilon)$ order, and in the case when the time interval is unbounded.

Analogous results are presented for a random integral equation of the Volterra type with a small parameter.