ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Szczepan Borkowski

WARIACYJNO-RÓŻNICOWA METODA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ BRZEGOWYCH OŚRODKÓW FIZYKALNIE NIELINIOWYCH

(Komunikat)

Streszczenie: Przyjęto przybliżoną postać funkcjonału, określającego całkowitą energię potencjalną ośrodka fizykalnie nieliniowego. Zakładając, że wektor przemieszczenia ośrodka jest funkcją liniową, w podobszarach czworościennych - uzyskano równania algebraiczne metody.

1. Wstęp

W niniejszej pracy rozpatrzono przybliżony sposób rozwiązania zadań brzegowych, ośrodka nieliniowo-sprężystego (model Kauderera). Przyjmuje się uproszczoną postać funkcjonału (całkowita energia potencjalna ośrodka), którą wyprowadzono w [2]; zakładając, że dziedziną tego funkcjonału jest zbiór funkcji wektorowych (przemieszczenie ośrodka), liniowych w podobszarach czworościennych - sprowadzono dany problem wariacyjny do równoważnego zadania na ekstremum funkcji wielu zmiennych; z warunków koniecznych uzyskano równania algebraiczne metody.

W pracy obowiązuje konwencja sumacyjna dla indeksów: $i,j,\ldots \in \{1,2,3\}$; $\alpha,\beta,\ldots \in \{1,2,3,4\}$; $\underset{A}{l},\underset{B}{k},\ldots \in \{1,2,3\}$; $A,B,\ldots \in \{1,2,\ldots,w\}$, gdzie w - jest liczbą węzłów, w których występują nieznane wektory przemieszczenia; A,B,... - bieżącym numerem węzła; $\underset{A}{l},\underset{B}{k},\ldots$ - określa bieżącą współrzędną wektora przemieszczenia, w węźle A,B,..

Przybliżone sposoby rozwiązywania zadań geometrycznie nieliniowych przedstawione są w pracach [1], [3]. Niniejsza problematyka jest kontynuacją pracy [2].

2. Sprzężone zadanie wariacyjne

Zagadnieniom brzegowym, ośrodków nieliniowo-sprężystych, w przemieszczeniach - odpowiada minimalizacja całkowitej energii potencjalnej ośrodka; przybliżona postać takiego funkcjonału, zgodnie z [2], określona jest przez

$$V = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{9}{2} K\varepsilon^2(1+a) + \frac{2G}{3} e^2(1+b)\right] dx - \int_{\mathcal{V}} X_i u_i dx - \int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \hat{X}_i \hat{u}_i dx, \tag{2.1}$$

gdzie

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad 3\varepsilon = \varepsilon_{kk}, \quad 2e^2 = 3/\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - 3\varepsilon^2),$$

$$2a = \Psi\varepsilon^2, \quad 2b = \chi e^2.$$

Pierwsza wariacja funkcjonału (2.1) ma postać

$$\delta V = \delta V_{(1)} + \delta V_{(2)} + \delta V_{(3)}, \quad \delta V = 0, \tag{2.2}$$

gdzie

$$\delta V_{(1)} = 2G\int_{\mathcal{V}} \delta\varepsilon_{ij} \left[(\varphi + \Phi)\, \varepsilon\delta_{ij} + (1 + \Psi/\varepsilon_{ij}\right] dx,$$

$$\delta V_{(2)} = -\int_{\mathcal{V}} \delta u_i X_i dx, \quad \delta V_{(3)} = -\int_{\partial\hat{\mathcal{V}}} \delta\hat{u}_i \hat{X}_i dx;$$

$$\varphi = \frac{3K}{2G} - 1, \quad \Phi = \left[(1 + \varphi/\psi + \frac{9}{2}\chi\right]\varepsilon^2 - \frac{3}{2}\chi\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl},$$

$$\Psi = \frac{3}{2}(\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl} - 3\varepsilon^2)\chi.$$

Zamiast obszaru $\mathcal{V}$ rozpatrywać będziemy dalej obszar $\overset{(\mathcal{N})}{\mathcal{V}}$, będący sumą rozłącznych obszarów czworościennych $\underset{I}{\Delta} = \underset{\cdot}{\Delta}$:

$$\overset{(\mathcal{N})}{\mathcal{V}} = \bigcup_{I=1}^{\mathcal{N}} \underset{I}{\Delta}, \quad \underset{I}{\Delta} \cap \underset{J}{\Delta} = \emptyset \text{ dla } I \neq J, \ I,J \in \{1,2,\ldots,\mathcal{N}\}; \tag{2.3}$$

zupełnie analogicznie, zamiast brzegu $\partial\mathcal{V}$ wprowadzimy zbiór, który będzie sumą rozłącznych obszarów trójkątnych $\partial \underset{I^*}{\Delta} = \partial\underset{*}{\Delta}$

$$\partial\overset{(\mathcal{N})}{\mathcal{V}} = \bigcup_{I^*=1^*}^{\mathcal{N}^*} \partial\underset{I^*}{\Delta} = \left(\bigcup_{I^*=1^*}^{\alpha^*} \partial\underset{I^*}{\hat{\Delta}}\right) \cup \left(\bigcup_{I^*=\alpha^*+1}^{\mathcal{N}^*} \partial\underset{I^*}{\tilde{\Delta}}\right) \tag{2.4}$$

$$\partial\underset{I^*}{\Delta} \cap \partial\underset{J^*}{\Delta} = \emptyset, \text{ dla } I^* \neq J^*, \quad I^*, J^* \in \{1, 2, \ldots, \alpha^*, \alpha^* + 1^*, \ldots, \mathcal{N}^*\}.$$

Podzbiór $\bigcup_{I} \partial\underset{I}{\hat{\Delta}}$, $\left(\bigcup_{I^*} \partial\underset{I^*}{\tilde{\Delta}}\right)$ odpowiada obszarowi $\partial\hat{\mathcal{V}}$, $/\partial\tilde{\mathcal{V}}/$, na którym zadane są obciążenia brzegowe $\hat{X}_i$, (przemieszczenia - $\tilde{u}_i$).

Zamiast problemu minimalizacji funkcjonału (2.2) rozpatrzymy zadanie minimalizacji funkcjonału $\overset{(\mathcal{N})}{V}$, którego dziedziną będzie zbiór funkcji, określonych na obszarach czworościennych $\underset{\bullet}{\Delta}$; funkcje $\underset{\bullet}{X}_i$, $(\underset{*}{\hat{X}}_i)$ określone będą na obszarach $\underset{\bullet}{\Delta}$, $(\underset{*}{\Delta})$; zadanie to możemy sformułować następująco:

$$\overset{(\mathcal{N})}{\delta V} = \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} (\delta \underset{I}{V}_{(1)} + \delta \underset{I}{V}_{(2)}) + \sum_{I^*=1^*}^{\mathcal{L}^*} \delta \underset{I^*}{V}_{(3)} = 0, \tag{2.5}$$

gdzie

$$\delta \underset{I}{V}_{(1)} = \delta \underset{\bullet}{V}_{(1)} = 2G \int_{\underset{\bullet}{\Delta}} \delta \varepsilon_{ij} \left[(\underset{\bullet}{\varphi} + \underset{\bullet}{\Phi}) \underset{\bullet}{\varepsilon} \delta_{ij} + (1 + \underset{\bullet}{\Psi}) \underset{\bullet}{\varepsilon}_{ij}\right] dx,$$

$$\delta \underset{I}{V}_{(2)} = \delta \underset{\bullet}{V}_{(2)} = -\int_{\underset{\bullet}{\Delta}} \delta \underset{\bullet}{u}_i \underset{\bullet}{X}_i dx, \quad \delta \underset{I^*}{V}_{(3)} = \delta \underset{*}{V}_{(3)} = -\int_{\underset{*}{\Delta}} \delta \underset{*}{\hat{u}}_i \underset{*}{\hat{X}}_i dx.$$

Problem (2.5), w stosunku do (2.2) - nazywać będziemy sprzężonym zadaniem wariacyjnym podziału $\mathcal{N}$-tego.

3. Określenie pola przemieszczeń w obszarach $\underset{\bullet}{\Delta}$

Oprócz globalnego układu współrzędnych $(\tilde{i})$ stosować będziemy układy lokalne (i), związane z jednym z wierzchołków czworościanu $\underset{\bullet}{\Delta}$. Reguły określające przekształcenie wektorów mają postać: $u_{\tilde{i}} = A_{\tilde{i}i} u_i$, $X_{\tilde{i}} = A_{\tilde{i}i} X_i$, a objętości elementu - $d\tilde{x} = \det \left\| A_{\tilde{i}i} \right\| dx = \mathcal{J} dx = 1dx$; ponieważ w funkcjonałach występują niezmienniki (np. $X_{\tilde{i}} u_{\tilde{i}} = X_i u_i$), więc postać ich jest inwariantna względem przekształcenia układu; należy tylko pamiętać, że w przypadku wprowadzenia lokalnych układów współrzędnych, funkcje $u_i, X_i \hat{X}_i$ będą zależne od zmiennych lokalnych, tj. obowiązujących dla danego czworościanu $\underset{\bullet}{\Delta}$; zaznaczać to będziemy symbolicznie przez $\underset{I}{u}_i = \underset{\bullet}{u}_i$, $\underset{I}{X}_i = \underset{\bullet}{X}_i$ $\underset{I^*}{\hat{X}}_i = \underset{*}{\hat{X}}_i$.

Zgodnie z założeniem podanym we wstępie, przyjmować będziemy, że w obszarach $\underset{I}{\Delta}$, o wierzchołkach

$$\underset{I}{\overset{\alpha}{A}} (\underset{I}{x}_{i\alpha}), \quad I \in \{1, 2, \ldots, \mathcal{N}\}, \ i \in \{1, 2, 3\}, \alpha \in \{1, 2, 3, 4\}, \tag{3.1}$$

pole przemieszczeń określone jest funkcją liniową

$$\underset{\bullet}{u}_i = \underset{\bullet}{f}_i (\underset{\bullet}{x}_j) = \underset{\bullet}{a}_i + \underset{\bullet}{b}_{ik} \underset{\bullet}{x}_k, \tag{3.2}$$

która w wierzchołkach czworościanu przyjmować będzie, na razie, nieokreślone wartości $\underset{\bullet}{u}_{i\alpha}$, tj.

$$\underset{\bullet}{f}_i (\underset{\bullet}{x}_{j\alpha}) = \underset{\bullet}{a}_i + \underset{\bullet}{a}_{ik} \underset{\bullet}{x}_{k\alpha} = \underset{\bullet}{u}_{i\alpha}; \tag{3.3}$$

tutaj

$$(x_{11}, x_{21}, x_{31}) = (0,0,0), \quad (x_{12}, x_{22}, x_{32}) = (h_1, 0, 0),$$

$$(x_{13}, x_{23}, x_{33}) = (x_C, h_2, 0), (x_{14}, x_{24}, x_{34}) = (x_D, y_D, h_3).$$

Podstawiając $(3.3)_{2,3}$ do (3.3) uzyskamy

$$\begin{aligned} a_i &= u_{i1}, \quad a_{i2} = -(1/h_2)\left[(1-x_C/h_1)u_{i1} + (x_C/h_1)u_{i2} - u_{i3}\right], \\ a_{i1} &= -(1/h_1)(u_{i1} - u_{i2}), \quad a_{i3} = -(1/h_3)\Big\{-\Big[1 - x_D/h_1 - \\ &\quad - (y_D/h_2)(1 - x_C/h_1)\Big]u_{i1} + \left[(x_D/h_1) - (y_D/h_2)(x_C/h_1)\right]u_{i2} + \\ &\quad + (y_D/h_2)u_{i3} - u_{i4}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jeżeli do (3.4) wprowadzimy współczynniki $b_{1\alpha}$, $b_{i\alpha}$ takie, że

$$[b_{1\alpha}] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad [u_{i\alpha}] = [u_{i1} \quad u_{i2} \quad u_{i3} \quad u_{i4}],$$

$$[[b_{\alpha i}]] = [[b_{i\alpha}]] = \left[\begin{array}{c|c|c} -[1/h_1] & -[1/h_2]\left[1-[x_C/h_1]\right] & [1/h_3]\left[1-x_D/h_1 - [y_D/h_2]\,[1-x_C/h_1]\right] \\ \hline 1/h_1 & -[x_C/h_1]\,[1/h_2] & -\left[[x_D/h_1]-[y_D/h_2]\,[x_C/h_1]\right][1/h_3] \\ \hline 0 & 1/h_2 & -[1/h_3][y_D/h_2] \\ \hline 0 & 0 & 1/h_3 \end{array}\right] \tag{3.5}$$

to wówczas, zamiast (3.2), uzyskamy

$$u_i = u_{i\alpha}\left[b_{\alpha 1} + b_{\alpha j} x_j\right]. \tag{3.6}$$

Równanie (3.6) jest podstawowym związkiem, określającym pole przemieszczeń ośrodka w rozpatrywanym obszarze Δ; przypominamy, że w pracy stosujemy konwencję sumacyjną, dla powtarzających się małych indeksów łacińskich (greckich) w dziedzinie 1,2,3 (1,2,3,4). Równanie (3.6) możemy też uważać za wynik odpowiednich działań na macierzach. Na podstawie (3.6) wyznaczamy

$$\delta u_{i} = \delta u_{i\alpha}\left[b_{\alpha 1} + b_{\alpha j}\, x_{j}\right],\quad u_{i,j} = u_{i\alpha} b_{\alpha j},\quad 3\varepsilon = u_{k,k} = u_{k\alpha} b_{\alpha k},$$

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)\, u_{k\alpha}\,(b_{\alpha j}\delta_{ki} + b_{\alpha i}\,\delta_{kj}), \tag{3.7}$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = \left[1/2\right]\left[\delta u_{kl}\right]\left[b_{\alpha j}\delta_{ki} + b_{\alpha i}\,\delta_{ki}\right].$$

4. Zadanie wariacyjno-różnicowe

Sformułowanie zadania. Przyjmując za dziedzinę funkcjonału sprzężonego zbiór funkcji wektorowych (3.6), liniowych w podobszarach czworościennych należy zminimalizować funkcjonał (2.5).
Podstawiając (3.6), (3.7) do (2.5) otrzymamy

$$\begin{gathered}\delta V_{(1)} = \delta u_{kl}\, \varkappa_{k\alpha l\beta}\, u_{\beta l},\\ \delta V_{(2)} = -\,\delta u_{k\alpha}\mu_{\alpha k},\quad \delta V_{(3)} = -\delta u_{k\alpha}\, \nu_{\alpha k},\end{gathered} \tag{4.1}$$

gdzie

$$\begin{gathered} v = \frac{1}{6}\, \underset{123}{hhh},\quad \mathfrak{X}_{k} = \int_{\Delta} X_{k}dx,\quad \hat{\mathfrak{X}}_{k} = \int_{\Delta} \hat{X}_{k}dx,\\ \varkappa_{k\alpha l\beta} = Gv(\delta_{ki}b_{\alpha j} + \delta_{kj}b_{\alpha i})\Big[\frac{1}{3}(\varphi+\Phi)\delta_{ij}b_{l\beta} + \\ + \frac{1}{2}\,(1+\Psi)(\delta_{li}b_{j\beta} + \delta_{lj}b_{i\beta}),\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\mu_{\alpha k} = b_{\alpha 1}\mathfrak{X}_{k} + b_{\alpha j}\int_{\Delta} x_{j}X_{k}dx,\quad \nu_{\alpha k} = b_{\alpha 1}\hat{\mathfrak{X}}_{k} + b_{\alpha j}\int_{\Delta} \hat{x}\,\hat{X}_{k}d\hat{x}.$$

Podstawiając (4.1) do (2.5) uzyskamy

$$\overset{(\mathcal{N})}{\delta V} = \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} \delta u_{k\alpha}(\varkappa_{k\alpha l\beta}u_{\beta l} + \mu_{\alpha k}) - \sum_{I^*=1^*}^{\alpha^*} \delta u_{k\alpha}\nu_{\alpha k} = 0.$$

Przyjmując w (4.3), że $\underset{B}{u_{Bl}}$ będzie zbiorem niewiadomych współrzędnych wektora przemieszczenia, w węźle B, gdzie $B\in\{1,2,\dots,w\}$, w - liczba węzłów a $\underset{B}{l}$ - liczba niewiadomych współrzędnych w tym węźle $\underset{B}{l} \in \{1,2,3\}$, równość (4.3) zapiszemy w postaci

$$\overset{(\mathcal{N})}{\delta V} = \delta \underset{A}{u_{kA}}(\underset{A\,B}{\varkappa_{kAlB}}\underset{B}{u_{Bl}} - \underset{A}{\mu_{Ak}} - \underset{A}{\nu_{Ak}}) = 0, \tag{4.4}$$

gdzie

$$\nu_{\underset{A}{Ak}} = 0 \quad \text{dla} \quad x_j \notin \overset{\Delta}{I^*}, \; I^* \in \left\{\alpha+1, \ldots, N^*\right\}.$$

Na podstawie (4.4), dla dowolnych $\delta u_{\underset{A}{kA}}$, uzyskujemy poszukiwany układ równań algebraicznych, metody wariacyjno-różnicowej

$$\varkappa_{\underset{A\;B}{kAlB}} u_{\underset{B}{Bl}} = \mu_{\underset{A}{Ak}} + \nu_{\underset{A}{Ak}} = \Lambda_{\underset{A}{Ak}}, \tag{4.5}$$

gdzie

$$\varkappa_{\underset{A\;B}{kAlB}} = f_{\underset{A\;B}{kAlB}}(\varkappa_{\underset{A\;B}{k\alpha l\beta}}).$$

Równanie (4.5) jest algebraicznym, nieliniowym równaniem, w którym liczba niewiadomych określona jest przez $\sum_B n_{\underset{B}{l}}$; w przypadku, gdy w każdym węźle występują trzy niewiadome, sumaryczna ich liczba wynosi 3w; tutaj $n_{\underset{B}{l}}$ jest liczbą niewiadomych współrzędnych, w węźle B. W równaniach (4.4) - (4.6) obowiązuje konwencja sumacyjna dla indeksów $A, B, \ldots \in \{1, 2, \ldots, w\}$ oraz dla indeksów $\underset{A}{k}, \underset{B}{l}, \ldots \in \{1, 2, 3\}$.

Proces iteracyjny dla równania (4.5) przedstawimy w postaci

$$\overset{(n)}{\varkappa}_{\underset{A\;B}{kAlB}} u^{(n-1)}_{\underset{B}{Bl}} = \Lambda_{\underset{A}{Ak}}, \quad (n=1,2,\ldots), \tag{4.6}$$

gdzie

$$\overset{(n)}{\varkappa}_{\underset{A\;B}{kAlB}} = f_{\underset{A\;B}{kAlB}}(\overset{(n)}{\varkappa}_{k\alpha l\beta}), \quad \overset{(n)}{\varkappa}_{k\alpha l\beta} = G\upsilon(\delta_{ki} b_{\alpha j} + \delta_{kj} b_{\alpha i}) \Big[\tfrac{1}{3}(\varphi+\Phi^{(n-1)})\delta_{ij} b_{l\beta} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(1 + \psi^{(n-1)})(\delta_{li}\, b_{j\beta} + \delta l_j b_{i\beta}\Big];$$

$$\psi^{(0)} = \Phi^{(o)} \equiv 0, \; \Phi^{(q+1)} = \Big[(1+\varphi)\psi + \tfrac{9}{2}\chi\Big]\overset{(q)2}{\varepsilon} - \tfrac{3}{2}\chi \varepsilon^{(q)}_{kl} \varepsilon^{(q)}_{kl},$$

$$\psi^{(q+1)} = \tfrac{3}{2}\chi(\varepsilon^{(q)}_{kl} \varepsilon^{(q)}_{kl} - 3\varepsilon^{(q)2}), \quad \varepsilon^{(q)} = \tfrac{1}{3} u^{(q)}_{kl}\, b_{kl},$$

$$\varepsilon^{(q)}_{kl} = \tfrac{1}{2} u^{(q)}_{kl}(b_{\alpha j}\delta_{ki} + b_{\alpha i}\,\delta_{ki}), \; (q = 0,1,\ldots).$$

Przytoczony tutaj algorytm rozwiązania zadania podano w postaci możliwie jak najogólniejszej, bez szczegółowego precyzowania tak samego obszaru V, jak i jego brzegu ∂V.

LITERATURA

[1] Argyris J.H., Dunne P.C.: Some contributions to non-linear solid mechanics, Lect.Notes Comput.Sci., 10, 1974, 42-139.

[2] Borkowski S.: Niektóre problemy wariacyjnego formułowania zadań brzegowych ośrodków fizycznie nieliniowych. Zesz.Nauk.Pol.Śl., Mat.-Fiz., 25, 1974, 181-188.

[3] Carey G.F.: A unified approach to three finite element theories for geometric monlinearity, Comput.Meth.Appl.Mech. a Eng., 1,4, (1974) 69-79.

РАЗНОСТНО-ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

В статье принимается приближенная форма для функционала, определяющего полную потенциальную энергию физически нелинейной среды. Принимая, что в подобластях (тетраэрд) вектором перемещений среды является линейная функция, получаем алгебраические уравнения метода.

THE VARIATIONAL-DIFFERENTIAL METHOD OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS SOLVING IN THE PHYSICAL NONLINEAR MEDIUM

S u m m a r y

The approximate shape of functional has been applied in this paper, determining the potential energy of physical nonlinear medium. The algebraic equations of this method were obtained by presuming that the displacement vectors of medium is the linear function of the tetrahedral underspaces.