ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z.28 Nr kol. 465

Jadwiga Jędrzejczyk

METODA ROZWIĄZAŃ SPRĘŻYSTYCH TEORII PŁYT DLA OŚRODKÓW NIELINIOWYCH FIZYCZNIE

Streszczenie: Stosując metodę rozwiązań sprężystych podano ciąg przybliżeń rozwiązań, jednorodnego (warunki brzegowe) problemu brzegowego nieliniowej fizycznie teorii płyt cienkich.

1. Wstęp

Celem prezentowanej pracy jest rozwiązanie problemu brzegowego nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego, czwartego rzędu, opisującego ugięcie płyty utwierdzonej.

Stosując metodę rozwiązań sprężystych, podaną przez Iljuszyna [2] (teoria plastyczności) skonstruowano ciąg przybliżeń uogólnionego rozwiązania i wykazano jego zbieżność.

Praca jest uogólnieniem wyników Bykowe i Szaczujewa [1] na przypadek nieliniowego fizycznie ciała sprężystego,(ośrodek Kąuderera [3])

2. Sformułowanie zadania

Niech Ω będzie ograniczonym obszarem na płaszczyźnie (x,y), z brzegiem Γ. Rozpatrzmy w Ω równanie

$$\left(\frac{K}{12}+\frac{G}{9}\right)\Delta\Delta w = f + \frac{h^2K}{80}\left[\varphi(\varepsilon_m)(w_{xx}+w_{yy})\right]_{xx} + \frac{h^2K}{40}\left[\varphi(\varepsilon_m)(w_{xx}+w_{yy})\right]_{yy} +$$

$$+\frac{h^2G}{40}\left[\chi(e_i)\left(\frac{2}{3}w_{xx}-\frac{1}{3}w_{yy}\right)\right]_{xx} + \frac{h^2G}{40}\left[\chi(e_i)\left(\frac{2}{3}w_{yy}-\frac{1}{3}w_{xx}\right)\right]_{yy} +$$

$$+\frac{h^2G}{20}\left[\chi(e_i)w_{xy}\right]_{xy}, \tag{1}$$

gdzie

$$\varepsilon_m = -\frac{1}{3}(w_{xx}+w_{yy}),$$

$$e_i^2 = \frac{4}{3}\left[\frac{2}{3}(w_{xx}^2+w_{yy}^2-w_{xx}w_{yy})+\frac{1}{2}w_{xy}^2\right],$$

z warunkami brzegowymi

$$w/_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n}/_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Równanie to wyprowadzono stosując przybliżoną teorię Kirchhoffa odnoszącą się do zginania płyt, obciążonych poprzecznie [6], dla ośrodków geometrycznie liniowych, a fizycznie nieliniowych [3], por. też [8], [9].

W rownaniu (1) $w=w(x,y)$ oznacza ugięcie płyty, $f=f(x,y)$ - intensywność obciążenia, $\underset{i}{e}$ intensywność tensora odkształcenia, K i G są odpowiednio, modułami odkształcenia objętościowego i postaciowego materiału płyty, której grubość wynosi 2h, n - normalną zewnętrzną obszaru, $\underset{m}{\varepsilon}$ średnim wydłużeniem względnym. Funkcje $\Psi(\underset{m}{\varepsilon})$ oraz $\chi(\underset{i}{e})$, wprowadzone przez Kauderera [3], w związkach między intensywnością tensora odkształcenia i naprężenia oraz średnim wydłużeniem i naprężeniem, muszą spełniać następujące warunki, gwarantujące dodatnią określoność energii odkształcenia

$$0 \leqslant \chi(\underset{i}{e}) \leqslant \chi(\underset{i}{e}) + \frac{d\chi(\underset{i}{e})}{d\underset{i}{e}} \leqslant \eta_1 < 1, \tag{3}$$

$$0 \leqslant \Psi(\underset{m}{\varepsilon}) \leqslant \Psi(\underset{m}{\varepsilon}) + \frac{d\,\Psi(\underset{m}{\varepsilon})}{d\underset{m}{\varepsilon}} \leqslant \eta_2 < 1. \tag{4}$$

3. Rozwiązanie zadania

Wprowadźmy dla dowolnych funkcji dwukrotnie różniczkowalnych w, v, następujące działanie:

$$(w, v)_1 = 2w_{xx}v_{xx} + 2w_{yy}v_{yy} + 6w_{xy}v_{xy} - w_{xx}v_{yy} - w_{yy}v_{xx}, \tag{5}$$

$$(w, v)_2 = (w_{xx} + w_{yy})(v_{xx} + v_{yy}). \tag{6}$$

Łatwo zauważyć, że $(w,w)_1$ oraz $(w,w)_2$ definiują nam seminormy lokalne

$$(w,w)_1 = \frac{9}{4}\underset{i}{e}^2 = \|w\|_1^2, \quad (w,w)_2 = 9\,\underset{m}{\varepsilon}^2 = \|w\|_2^2. \tag{7}$$

Mnożąc teraz równanie (1) przez dowolną funkcję dwukrotnie ciągle różniczkowalną w Ω i spełniającą na brzegu warunki $v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$, a następnie całkując po obszarze Ω i uwzględniając (5), (6) i (7), otrzymamy równanie

$$\left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9}\right)\left[\int (w,v)_1 \, d\Omega + \int (w,v)_2 \, d\Omega\right] =$$

$$= \frac{h^2 G}{120}\int \chi(\|w\|_1)(w,v)_1 \, d\Omega + \frac{h^2 K}{80}\int \varphi(\|w\|_2)(w,v)_2 d\Omega + \int pv \, d\Omega \, . \qquad (8)$$

Oznaczając przez $W_2^2(\Omega)$ przestrzeń funkcji, otrzymaną przez uzupełnienie w normie przestrzeń Sobolewa [5], [7], zbioru funkcji nieskończenie razy różniczkowalnych w Ω i o nośnikach zwartych w Ω, zdefiniujemy uogólnione rozwiązanie problemu (1) - (2).

Definicja

Funkcję $w \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ nazywamy uogólnionym rozwiązaniem problemu (1)-(2), jeżeli dla każdej funkcji $v \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ spełniona jest tożsamość (8).

Oczywistym jest, że rozwiązanie klasyczne problemu (1)-(2) spełnia równanie (8).

Skonstruujemy teraz ciąg przybliżeń rozwiązania, określony następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9}\right)\left[\int (w^{n+1},v)_1 \, d\Omega + \int (w^{n+1}, v)_2 \, d\Omega =\right.$$

$$\frac{h^2 G}{120}\int \chi(\|w^n\|_1)(w^n,v)_1 \, d\Omega + \frac{h^2 K}{80}\int \varphi(\|w^n\|_2)(w^n,v)_2 d\Omega + \int pv \, d\Omega \, . \qquad (9)$$

Twierdzenie

Jeżeli istnieją rozwiązania (8) spełniające warunki (3), (4), to ciąg przybliżeń (9) jest zbieżny w $\mathring{W}_2^2$ do rozwiązania uogólnionego.

Dowód:

Dla dowodu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(w,v)_{1\Omega} = \int (w,v)_1 d\Omega \, , \quad \|w\|_{1\Omega}^2 = \int \|w\|_1^2 \, d\Omega \qquad (10)$$

$$(w,v)_{2\Omega} = \int (w,v)_2 d\Omega \, , \quad \|w\|_{2\Omega}^2 = \int \|w\|_2^2 \, d\Omega \qquad (11)$$

$$(w,v)_{\Omega} = \int \left[(w,v)_1 + (w,v)_2\right] d\Omega, \; \|w\|_{\Omega}^2 = \int \left[\|w\|_1^2 + \|w\|_2^2\right] d\Omega \, . \qquad (12)$$

Można łatwo wykazać, korzystając dwukrotnie z nierówności Friedrichsa [4], że dla funkcji z $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ zachodzi

$$\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} \leqslant C\,\|w\|_\Omega . \tag{13}$$

Z nierówności (4) oraz związku (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{K}{12}+\frac{G}{9}\right)\left|(w^{n+1}-w^n,v)_\Omega\right| = \\
&= \left|\frac{h^2G}{120}\int\left[\chi(\|w^n\|_1)(w^n,v)_1 - \chi(\|w^{n-1}\|_1)(w^{n-1},v)_1\right]d\Omega + \right. \\
&\left. + \frac{h^2K}{80}\int\left[\psi(\|w^n\|_2)(w^n,v)_2 - \psi(\|w^{n-1}\|_2)(w^{n-1},v)_2\right]d\Omega\right| \leqslant \\
&\frac{h^2G}{120}\left|\int\left[\chi(\|w^n\|_1)(w^n,v)_1 - \chi(\|w^{n-1}\|_1)(w^{n-1},v)_1\right]d\Omega\right| + \\
&+ \frac{h^2K}{120}\left|\int\left[\psi(\|w^n\|_2)(w^n,v)_2 - \psi(\|w^{n-1}\|_2)(w^{n-1},v)_2\right]d\Omega\right| = \\
&= \frac{h^2G}{120}F_1(w,v) + \frac{h^2K}{120}F_2(w,v).
\end{aligned} \tag{14}$$

Nierówność Buniakowskiego, razem z warunkami (3), (5) i (7) pozwalają pierwszy składnik sumy z prawej strony powyższej nierówności oszacować następująco:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left|\left[\chi(\|w^n\|_1)(w^n,v)_1 - \chi(\|w^{n-1}\|_1)(w^{n-1},v)_1 + \chi(\|w^n\|_1(w^{n-1},v)_1 - \right.\right. \\
&\left.\left. - \chi(\|w^{n-1}\|_1)(w^{n-1},v)_1\right]d\Omega\right| \leqslant \int\left|\chi(\|w^n\|_1)\right|\cdot\left|(w^n-w^{n-1},v)_1\right| + \\
&+ \left|\chi(\|w^n\|_1) - \chi(\|w^{n-1}\|_1)\right|\cdot\left|(w^{n-1},v)_1\right| \; d\Omega \leqslant \\
&\int\left[\chi(\|w^n\|_1) + \left|\frac{\chi(\|w^n\|_1) - \chi(\|w^{n-1}\|_1)}{\|w^n - w^{n-1}\|_1}\,\|w^{n-1}\|_1\right|\right]\|w^n-w^{n-1}\|_1\,\|v\|_1 \leqslant \\
&\leqslant \eta_1\int\|w^n-w^{n-1}\|_1\,\|v\|_1 \leqslant \eta_1\|w^n-w^{n-1}\|_{1\Omega}\|v\|_{1\Omega} \leqslant \eta_1\|w^n-w^{n-1}\|_\Omega\,\|v\|_\Omega .
\end{aligned} \tag{15}$$

W analogiczny sposób korzystając z nierówności Buniakowskiego, warunku (4), (6) i (7) możemy oszacować drugi składnik sumy z (14)

$$F_2 \leqslant \left|\int\left[\psi(\|w^n\|_2)(w^n-w^{n-1},v)_2 + (\psi(\|w^n\|_2) - \psi(\|w^{n-1}\|_2)(w^{n-1},v)_2\right] d\Omega\right| \leqslant$$

$$\int\left[\psi(\|w^n\|_2)\ \|w^n-w^{n+1}\|_2\ \|v\|_2 + \left|\psi(\|w^n\|_2) - \psi(\|w^{n-1}\|_2)\right| \|w^{n-1}\|_2\|v\|_2\right] d\Omega =$$

$$= \int\left[\psi(\|w^n\|_2) + \left|\frac{\psi(\|w^n\|_2) - \psi(\|w^{n-1}\|_2)}{\|w^n - w^{n-1}\|_2}\right| \|w^{n-1}\|_2\right] \|w^n-w^{n-1}\|_2\ \|v\|_2 \leqslant \tag{16}$$

$$\eta_2\int\|w^n-w^{n-1}\|_2\ \|v\|_2 \leqslant \eta_2\ \|w^n-w^{n-1}\|_{2\Omega}\ \|v\|_{2\Omega} \leqslant \eta_2\ \|w^n-w^{n-1}\|_\Omega \|v\|_\Omega .$$

Oszacowanie wielkości F_1 i F_2 pozwala napisać nierówność (14) w postaci:

$$\left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9}\right) |(w^{n+1}-w^n,v)_\Omega| \leqslant \frac{h^2G}{120}\ \eta_1\ \|w^n-w^{n-1}\|_\Omega\ \|v\|_\Omega + \frac{h^2K}{80}\ \eta_2\|w^n-w^{n-1}\|_\Omega\|v\|_\Omega . \tag{17}$$

Przyjmując $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$ uzyskujemy

$$|(w^{n+1}-w^n,v)_\Omega| \leqslant \eta\frac{9h^2}{40}\ \frac{2G+3K}{3K+4G}\ \|w^n-w^{n-1}\|_\Omega\|v\|_\Omega \tag{18}$$

skąd wynika, że

$$\|w^{n+1}-w^n\|_\Omega \leqslant \eta^n\left(\frac{9h^2}{40}\right)^n \left(\frac{2G+3K}{3K+4G}\right)^n \|w^1-w^0\|_\Omega . \tag{19}$$

Z podanej nierówności (18) oraz warunków $\eta < 1$, $\frac{9h^2}{40} < 1$ wynika

$$\|w^{n+1}-w^n\|_\Omega \to 0, \text{ dla } n \to \infty$$

oraz

$$\|w^{n+1}-w^n\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2} \to 0, \text{ (por. (13))}.$$

Z ostatniej zależności i zupełności przestrzeni $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ wynika, że ciąg $\{w^n\}$ jest zbieżny, c.b.d.o.

LITERATURA

[1] Bykow D.Ł., Szaczujew W.A.: Ob odnom obobszczeni metoda uprugich reszenij, Prikł.Mat.Mech. 2, 23 (1968), 290-296.

[2] Iliuszyn A.A.: Płastycznost', Gostiechizdat 1948.

[3] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer-Verlag 1958.

[4] Michlin S.G.: Wariacionnyje metody w matematiczeskoj fizykie. Nauka 1970.

[5] Sobolew S.Ł.: Niekotoryje primienienija funkcionalnogo analiza w matematiczeskoj fizikie, Izd.L.G.U. 1950.

[6] Timoshenko S.: Teoria płyt i powłok, Arkady 1959.

[7] Yosida K.: Functional analysis, Springer-Verlag 1965.

[8] Jędrzejczyk J.: Wariacyjne formułowanie problemów brzegowych płyt dla ośrodków nieliniowych fizycznie. Zesz.Nauk.Pol.Śl., Mat.-Fiz., 25, 1974, 207-212.

[9] Borkowski S.: Niektóre problemy wariacyjnego formułowania zadań brzegowych ośrodków fizycznie nieliniowych, Zesz.Nauk.Pol.Śl., Mat.-Fiz., 25, 1974, 181-188.

МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

Пользуясь методом упругих решений подано последовательность решений однородной (краевые условия) краевой задачи по физически нелинейной теории тонких пластинок.

A METHOD OF ELASTIC SOLUTIONS IN THE PLATES THEORY FOR PHYSICALY NONLINEAR MEDIA

S u m m a r y

Applying a method of elastic solutions there has been given a sequence of approximate solutions of a homogeneous (boundary conditions) physicaly nonlinear boundary problem in the theory of thin plates.