ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Jadwiga Jędrzejczyk

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W PŁYTACH NIELINIOWYCH FIZYCZNIE

Streszczenie: Stosując metodę elementów skończonych podano algorytm minimalizacji funkcjonału całkowitej energii potencjalnej płyty nieliniowej fizycznie.

1. Wstęp

Celem prezentowanej pracy jest podanie algorytmu minimalizacji funkcjonału całkowitej energii potencjalnej płyty [3], uzyskanego przy założeniach klasycznej teorii Kirchoffa zginania płyt [6] i nieliniowych związkach pomiędzy naprężeniami i odkształceniami [4].

Rozwiązanie uzyskujemy stosując metodę elementów skończonych i metodę naprężeń początkowych [8], pozwalającą zachować niezmienioną macierz sztywności w procesie iteracyjnym. Do analizy ugięcia zastosowano elementy trójkątne, wprowadzone i omówione w pracach [1, 2, 9].

Macierz sztywności przyjęto w postaci uzyskanej w pracy [5].

2. Wielomiany interpolacyjne

Niech Ω będzie obszarem na płaszczyźnie (x, y) ograniczonym wielokątem Γ. Podzielmy obszar Ω na trójkąty $\{T_k\}_{k=1}^{M}$ w ten sposób, by dowolne dwa trójkąty miały albo wspólny bok lub wierzchołek albo były rozłączne oraz by najmniejszy kąt trójkątów α był ograniczony z dołu przez $\alpha_0 > 0$.

Dla zdefiniowania wielomianu interpolacyjnego $p(x,y)$, wprowadzonego przez Ženiška [7], oznaczmy przez $P_i = (x_j, y_j)$ $j=1,2,3$ wierzchołek trójkąta T, l_{ij} długość boku łączącego punkt P_i z P_j, ν_i normalną do boku l_{ij} $(i<j)$ oraz Θ_i środek boku l_{ij} $(i<j)$.

Załóżmy, że dla wielomianu $p(x,y)$ stopnia piątego, określone są następujące wielkości:

$$\frac{\partial^{(i)} p(P_j)}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} \quad i = (i_1, i_2) \quad |i| = i_1 + i_2 \quad |i| = 0,1,2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial p(\Theta_j)}{\partial \nu_j} \quad j = 1,2,3. \tag{2}$$

Zgodnie z twierdzeniem z pracy [2], wartości (1), (2) określają jednoznacznie wielomian stopnia piątego. Przyporządkujemy więc każdemu wierzchołkowi P_j^k i punktom Q_j^k trójkątów $\{T_k\}_{k=1}^{M}$ wartości postaci (1), (2). Wówczas funkcja $w(x,y)$, która na każdym trójkącie T_k jest równa wielomianowi $p^k(x,y)$ zdefiniowanemu w powyższy sposób, jest ciągle różniczkowalna i należy do $W_2^2(\Omega)$ (por. [9], [2]). W tak zdefiniowanej klasie funkcji można minimalizować funkcjonał energii całkowitej płyty.

3. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy w Ω równanie:

$$\left(\frac{K}{12}+\frac{G}{9}\right)\Delta\Delta = f + \frac{h^2K}{80}\left[\psi\varepsilon_m^2\,(w_{xx}+w_{yy})\right]_{xx} +$$

$$+\frac{h^2K}{80}\left[\psi\varepsilon_m^2\,(w_{xx}+w_{yy})\right]_{yy} + \frac{h^2G}{40}\left[\chi e_i^2\left(\frac{2}{3}w_{xx}-\frac{1}{3}w_{yy}\right)\right]_{xx} + \tag{3}$$

$$+\frac{h^2G}{40}\left[\chi e_i^2\left(\frac{2}{3}w_{yy}-\frac{1}{3}w_{xx}\right)\right]_{yy} + \frac{h^2G}{20}\left[\chi e_i^2\, w_{xy}\,{}_{xy}\right]$$

$$w\Big|_\Gamma = \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0$$

oraz ciąg przybliżeń jego rozwiązania, określony następującym rekurencyjnym wzorem:

$$\left(\frac{K}{12}+\frac{G}{9}\right)\Delta\Delta\, w^n = f + \frac{h^2K}{80}\left[\psi(\varepsilon_m^{n-1})^2\,(w_{xx}^{n-1}+w_{yy}^{n-1})\right]_{xx} +$$

$$+\frac{h^2K}{80}\left[\psi(\varepsilon_m^{n-1})^2(w_{xx}^{n-1}+w_{yy}^{n-1})\right]_{yy} + \frac{h^2G}{40}\left[\chi(e_i^{n-1})^2\left(\frac{2}{3}w_{xx}^{n-1}-\frac{1}{3}w_{yy}^{n-1}\right)\right]_{xx} +$$

$$+\frac{h^2G}{40}\left[\chi(e_i^{n-1})^2\left(\frac{2}{3}w_{yy}^{n-1}-\frac{1}{3}w_{xx}^{n-1}\right)\right]_{yy} + \frac{h^2G}{20}\left[\chi(e_i^{n-1})^2\, w_{xy}^{n-1}\right]_{xy} \tag{4}$$

$$w^n\Big|_\Gamma = \frac{\partial w^n}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0. \tag{5}$$

W równaniach (3) i (4) $w = w(x,y)$ oznacza ugięcie płyty, $f = f(x,y)$ intensywność obciążenia, $\varepsilon_m = -\frac{1}{3}(w_{xx}+w_{yy})$ - średnie wydłużenie względne $e_i^2 = \frac{8}{9}\left[w_{xx}^2 + w_{yy}^2 - w_{xx}w_{yy} + 3w_{xy}^2\right]$ - intensywność tensora odkształcenia a K, G, χ, ψ - stałe materiałowe płyty, której grubość wynosi $2h$.

Rozwiązanie problemu (4), (5) jest równoważne ze znalezieniem minimum funkcjonału [10].

$$\Pi(w_n) = \int_\Omega \mathbf{a}^T(w_n)\mathbf{D}\,\mathbf{a}(w_n)d\Omega - \frac{2}{H}\int_\Omega \Big[f w_n + \frac{h^2K}{80}\psi(\varepsilon_m^{n-1})^2\,\mathbf{a}^T(w_{n-1})\mathbf{D}_1\mathbf{a}(w_n) + \frac{h^2G}{120}\chi(e_i^{n-1})^2\,\mathbf{a}^T(w_{n-1})\,\mathbf{D}_2\,\mathbf{a}(w_n)\Big]\,d\Omega,$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}(w_n) = \left[w_{xx}^n,\ w_{xy}^n,\ w_{yy}^n\right]^T$$

$$H = \frac{K}{12} + \frac{G}{9}.$$

Niech T będzie dowolnym trójkątem z danego podziału $\{T_k\}_{k=1}^{M}$ i niech $u = u(x,y)$ będzie wielomianem określanym na T, zdeterminowanym przez warunki (1), (2). Jeżeli wartości funkcji (1), (2) uporządkujemy w wektor kolumnę oznaczoną przez $\mathbf{w}$ to wówczas wyrażenie (6) przyjmie na trójkącie T postać

$$\Pi_T(u_n) = \int_T \mathbf{a}^T(u_n)\mathbf{D}\,\mathbf{a}(u_n)dT - \frac{2}{H}\int_T \Big[f\,u_n + \frac{h^2K}{80}\psi(\varepsilon_m^{n-1})^2\,\mathbf{a}^T(u_{n-1})\mathbf{D}_1\mathbf{a}(u_n) + \frac{h^2G}{120}\,\chi(e_i^{n-2})^2\,\mathbf{a}^T(u_{n-1})\,\mathbf{D}_2\,\mathbf{a}(u_n)\Big]\,dT.$$

Ponieważ $u(x,y)$ jest liniową kombinacją współrzędnych wektora $\mathbf{w}$, więc $\Pi_T(u_n)$ będzie postacią (por. [5, 3]):

$$\Pi_T(u_n) = \mathbf{w}_n^T\mathbf{K}\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^T\mathbf{F}_{n-1}. \tag{8}$$

Jak widać, macierz sztywności $\mathbf{K}$ pozostaje stała podczas procesu iteracyjnego a zmianie ulega tylko macierz obciążenia $\mathbf{F}_{n-1}$. Macierz $\mathbf{K}$ przyjmujemy w formie zaproponowanej w pracy [5] a zajmiemy się obliczaniem $\mathbf{F}_{n-1}$.

4. Macierz obciążenia $\mathbf{F}_{n-1}$

Oznaczmy przez T_o trójkąt w układzie $(\hat{\xi},\eta)$ o wierzchołkach $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$.

Transformacja

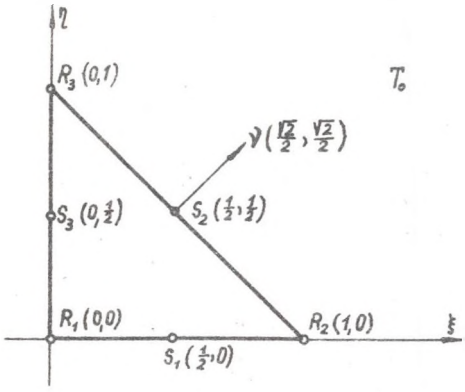
$$x = x_1 + \bar{x}_2\hat{\xi} + \bar{x}_3\eta \qquad y = y_1 + \bar{y}_2\hat{\xi} + \bar{y}_3\eta, \tag{9}$$

gdzie

$$\bar{x}_j = x_j - x_1, \quad \bar{y}_j = y_j - y_1 \qquad j = 1,2$$

przekształca trójkąt T w T_o.

Funkcja $\tilde{u}(\hat{\xi},\eta) = u(x_1 + \bar{x}_2\hat{\xi} + \bar{x}_3\eta,\ y_1 + \bar{y}_2\hat{\xi} + \bar{y}_3\eta)$ jest wielomianem stopnia piątego, zmiennych $(\hat{\xi},\eta)$. Wielomian ten jest jednoznacznie zdefiniowany przez współrzędne wektora $\tilde{\mathbf{w}}$ (rys. 1):



Rys. 1

$$\tilde{\mathbf{w}} = \left[\tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2, \tilde{\mathbf{w}}_3, \tilde{\mathbf{w}}_4, \tilde{\mathbf{w}}_5, \tilde{\mathbf{w}}_6\right]^T, \tag{10}$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{w}}_j = \left[\tilde{u},\ \tilde{u}_{\hat{\xi}},\ \tilde{u}_\eta,\ \tilde{u}_{\hat{\xi}\hat{\xi}},\ \tilde{u}_{\hat{\xi}\eta},\ \tilde{u}_{\eta\eta}\right]^T_{R_j} \qquad j=1,2,3$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_4 = \left[\tilde{u}_\eta\right]_{s_1}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_5 = \left[\tilde{u}\right]_{s_2}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_6 = \left[\tilde{u}_{\hat{\xi}}\right]_{s_3}.$$

Wektor $\mathbf{w}$ o współrzędnych

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]^T$$
$$w_i = [u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}]^T p_i \quad i=1,2,3 \tag{11}$$
$$w_i = [u_{v_i}] q_i \quad i=4,5,6$$

związany jest z wektorem $\tilde{\mathbf{w}}$ zależnością

$$\tilde{\mathbf{w}} = \Lambda \mathbf{w}, \tag{12}$$

gdzie Λ jest macierzą zależną tylko od $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$.
Macierz Λ może być zapisana w formie [5]

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Λ_1 jest macierzą 18 x 21 wyrażającą zależność na pierwsze osiem współrzędnych wektora $\tilde{\mathbf{w}}$ i wynosi [5]

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{O}_1 & \mathbf{O}_1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_1 & \mathbf{T} & \mathbf{O}_1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_1 & \mathbf{O}_1 & \mathbf{T} & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

gdzie $\mathbf{O}_1$ i $\mathbf{O}_2$ są macierzami zerowymi typu 6 x 6 i 6 x 3, a $\mathbf{T}$ macierzą 6 x 6

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2\bar{y}_2 & \bar{y}_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_3\bar{x}_2 & \bar{y}_3\bar{x}_2+\bar{x}_3\bar{y}_2 & \bar{y}_3\bar{y}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_3^2 & 2\bar{y}_3\bar{x}_3 & \bar{y}_3^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Λ_2 (3 x 21) jest iloczynem macierzy $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ i $\mathbf{T}_3$ odpowiednio typu 3 x 6, 6 x 6, 6 x 21.

Macierze te wynoszą (oznaczenia rys. 2) [5]:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x}_3+\bar{y}_3) & \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x}_3+\bar{y}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{12} & -\sin\vartheta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_{12} & \cos\vartheta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta_{23} & -\sin\vartheta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\vartheta_{23} & \cos\vartheta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\vartheta_{13} & -\sin\vartheta_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\vartheta_{13} & \cos\vartheta_{13} \end{bmatrix} \tag{17}$$

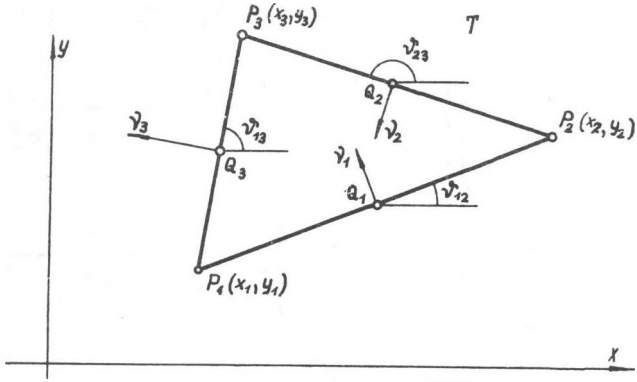
$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{12} & \mathbf{n}_{12} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{23} & \mathbf{m}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{m}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

gdzie

$$\mathbf{0} = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

$$\mathbf{m}_{ij} = \Big[-\frac{15}{8} l_{ij},\ -\frac{7}{16}\cos\vartheta_{ij},\ -\frac{7}{16}\sin\vartheta_{ij},\ -\frac{l_{ij}}{32}\cos^2\vartheta_{ij},\ -\frac{l_{ij}}{16}\cos\vartheta_{ij}\sin\vartheta_{ij},\ -\frac{l_{ij}}{32}\sin^2\vartheta_{ij}\Big] \tag{19}$$

$$\mathbf{n}_{ij} = \Big[\frac{15}{8} l_{ij},\ -\frac{7}{16}\cos\vartheta_{ij},\ -\frac{7}{16}\sin\vartheta_{ij},\ \frac{l_{ij}}{32}\cos^2\vartheta_{ij},\ \frac{l_{ij}}{16}\cos\vartheta_{ij}\sin\vartheta_{ij},\ \frac{l_{ij}}{32}\sin^2\vartheta_{ij}\Big]. \tag{20}$$



Rys. 2

Jeśli $\mathbf{b}(\tilde{u})$ jest wektorem

$$\mathbf{b}(\tilde{u}) = \left[\tilde{u}_{\xi\xi},\ \tilde{u}_{\xi\eta},\ \tilde{u}_{\eta\eta}\right]^T \tag{21}$$

to

$$\mathbf{a}(u) = \mathbf{H}\,\mathbf{b}(\tilde{u}), \tag{22}$$

gdzie macierz $\mathbf{H}$, obliczona na podstawie zasad różniczkowania funkcji złożonej i transformacji odwrotnej do (9) wynosi

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\bar{x}_2\bar{y}_3-\bar{x}_3\bar{y}_2}\begin{bmatrix} \bar{y}_3^2 & 2\bar{y}_2\bar{y}_3 & \bar{y}_2^2 \\ -\bar{x}_x\bar{y}_3 & \bar{y}_2\bar{x}_3+\bar{y}_3\bar{x}_2 & -\bar{y}_2\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_3^2 & -2\,\bar{x}_2\bar{x}_3 & \bar{x}_2^2 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Biorąc pod uwagę (22), drugą całkę w wyrażeniu (7) można przedstawić:

$$I_2 = \int_{T_o} \Big\{ \tilde{f}\,\tilde{u}_n + \frac{h^2K}{80}\frac{\psi}{3}\left[\mathbf{b}^T(\tilde{u}_n)\,\mathbf{M}_1\mathbf{b}(\tilde{u}_{n-1})\right]\left[\mathbf{b}^T(\tilde{u}_{n-1})\mathbf{M}_1\mathbf{b}(\tilde{u}_{n-1})\right] + \\ + \frac{h^2G}{120}\frac{4}{9}\chi\left[\mathbf{b}^T(\tilde{u}_n)\mathbf{M}_2\mathbf{b}(\tilde{u}_{n-1})\quad\left[\mathbf{b}^T(u_{n-1})\mathbf{M}_2\mathbf{b}(\tilde{u}_{n-1})\right]\right]\Big\}\,|J|\,dT_o, \tag{24}$$

gdzie

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\xi,\eta) = f(x_1 + \bar{x}_2\xi + \bar{x}_3\eta,\ y_1 + \bar{y}_2\xi + \bar{y}_3\xi)$$

$\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_1\mathbf{H}$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_2\mathbf{H}$ a $J = \bar{x}_2\bar{y}_3 - \bar{x}_3\bar{y}_2$ jest jakobianem przekształcenia (9).

Uwzględniając (21) i symetryczność macierzy $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ możemy (24) zapisać w postaci:

$$I_2 = \int_{T_0} \Big[\tilde{f}\,\tilde{u}_n + \frac{h^2 K}{80}\frac{\psi}{3} \sum_{\substack{r,s=1\\ t\leq z=1}}^{3} \overset{1}{m}_{rs}\, b_{tz} \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial \xi^{3-r}\partial \eta^{r-1}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_{n-1}}{\partial \xi^{3-s}\partial \eta^{s-1}} \times$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{n-1}}{\partial \xi^{3-t}\partial \eta^{t-1}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_{n-1}}{\partial \xi^{3-z}\partial \eta^{z-1}} + \frac{h^2 G}{120}\frac{4}{9}\chi \sum_{\substack{r,s=1\\ t\leq z=1}}^{3} \overset{2}{m}_{rs}\, a_{tz} \frac{\partial^2 \tilde{u}_{n-1}}{\partial \xi^{3-r}\partial \eta^{r-1}} \times \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{n-1}}{\partial \xi^{3-s}\partial \eta^{s-1}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_{n-1}}{\partial \xi^{3-s}\partial \eta^{t-1}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_{n-1}}{\partial \xi^{3-2}\partial \eta^{z-1}} \Big] |I| ,$$

gdzie

$$\mathbf{M}_i = \left[\overset{i}{m}_{rs}\right] \quad i=1,2; \quad a_{rr} = \overset{2}{m}_{rr}, \quad a_{rs} = 2m_{rs}, \quad b_{rr} = \overset{1}{m}_{rr}, \quad b_{rs} = 2\,\overset{1}{m}_{rs}.$$

Ponieważ funkcja $\tilde{u}(\xi,\eta)$ jest wielomianem stopnia piątego, więc można ją wyrazić jako iloczyn wektora $\boldsymbol{\alpha}$, którego współrzędnymi są współczynniki wielomianu i wektora

$$\mathbf{q} = \left[1,\ \xi,\ \eta,\ \xi^2, \ldots \xi\eta^4,\ \eta^5\right]^T$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\alpha}. \tag{26}$$

Pamiętając, że $\tilde{u}(\xi,\eta)$ jest określone przez parametry $\mathbf{w}$, otrzymamy dla wyznaczenia $\boldsymbol{\alpha}$, układ równań

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{w}}. \tag{27}$$

Macierz $\mathbf{S}$ możemy zapisać następująco

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{S}_1,\ \mathbf{S}_2,\ \mathbf{S}_3,\ \mathbf{S}_4,\ \mathbf{S}_5,\ \mathbf{S}_6\right]^T. \tag{28}$$

Elementami macierzy $\mathbf{S}_i$ $i=1,2,3$ są pochodne funkcji $\tilde{u}$ w punktach P_i $i=1,2,3$ a macierzy $\mathbf{S}_j$ $j=4,5,6$ pochodne normalne $\tilde{u}$ w punktach S_j $j=1,2,3$ Macierze te odpowiednio wynoszą:

Macierze te odpowiednio wynoszą:

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 1 & \xi_i & \eta_i & \xi_i^2 & \xi_i\eta_i & \dots & \xi_i^2\eta_i^3 & 3\eta_i^4 & \eta_i^5 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi_i & \eta_i & \dots & 2\xi_i\eta_i^3 & \eta_i^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_i & \dots & 3\xi_i^2\eta_i^2 & 4\xi_i\eta_i^3 & 5\eta_i^4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 2\eta_i^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 6\xi_i\eta_i^2 & 4\eta_i^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6\xi_i^2\eta_i & 12\xi_i\eta_i^2 & 20\eta_i^3 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\mathbf{s}_4 = \left[0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{4}\ 0,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{8},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{16},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\right]$$

$$\mathbf{s}_5 = \left[0,\ \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \tfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \tfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \tfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \tfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \tfrac{\sqrt{2}}{4},\ \tfrac{\sqrt{2}}{4},\ \tfrac{\sqrt{2}}{4},\ \tfrac{\sqrt{2}}{4},\ \tfrac{5\sqrt{2}}{32},\ \tfrac{5\sqrt{2}}{32},\ \tfrac{5\sqrt{2}}{32},\ \tfrac{5\sqrt{2}}{32},\ \tfrac{5\sqrt{2}}{32},\ \tfrac{5\sqrt{2}}{32}\right] \tag{30}$$

$$\mathbf{s}_6 = \left[0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{8},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \tfrac{1}{16},\ 0\right].$$

Uwzględniając teraz (26), (27), (12) funkcję $\tilde{u}(\xi,\eta)$ napiszemy następująco:

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \mathbf{w}^T\Lambda^T(\mathbf{s}^{-1})^T\mathbf{q}\,. \tag{31}$$

Wykorzystując relację (31) i wprowadzając oznaczenia

$$\mathbf{q}_r = \frac{\partial^2\mathbf{q}}{\partial\xi^{3-r}\,\partial\eta^{r-1}} \tag{32}$$

$$\underset{n-1}{\mathbf{A}}{}_{rstz} = \int_{T_o} \mathbf{q}_r\left[\mathbf{w}_{n-1}^T\Lambda^T(\mathbf{s}^{-1})^T\mathbf{q}_s\right]\left[\mathbf{w}_{n-1}^T\Lambda^T(\mathbf{s}^{-1})^T\mathbf{q}_t\right]\left[\mathbf{w}_{m-1}^T\Lambda^T(\mathbf{s}^{-1})^T\mathbf{q}_z\right]|J|\ dT_o$$

uzyskujemy następującą postać wyrażenia (25)

$$I_2 = \mathbf{w}_n^T\Lambda^T(\mathbf{s}^{-1})^T\left\{\int_{T_o}\tilde{f}\,\mathbf{q}\,|J|\,dT_o + \sum_{\substack{r,s=1\\ t\leq z=1}}^{3}\left[\frac{h^2G}{120}\ \frac{4\chi}{9}\,m_{rs}^1 b_{tz}\underset{n-1}{\mathbf{A}}{}_{rstz} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{h^2K}{80}\ \frac{\psi^2}{3}\,m_{rs}\,a_{tz}\underset{n-1}{\mathbf{A}}{}_{rstz}\right]\right\}.$$

LITERATURA

[1] Bell K.: A refined triangular plate bending finite element Int.J.Numer Math.in Engrg, vol 1, 101-102, 1969.

[2] Bramble J., Zlamal M.: Triangular element in the finite element method.Math. of Comput., vol 24,112, 809-820, 1970.

[3] Jędrzejczyk J.: Wariacyjne formułowanie problemów brzegowych płyt dla ośrodków nieliniowych fizycznie, Zeszyt Naukowy Pol.Śl., w druku, Mat.-Fiz.

[4] H. Kauderer: Nichtlineare Mechanik, Springer-Verlag Berlin 1958.

[5] Kratochvil J., Ženišek A., Zlamal M.: A simple algorithm for the stiffness matrix of triangular plate bending elements.Int.J. Numer Math.in Engrg, vol 3, 553-563, 1971.

[6] Timoszenko S.: Teoria płyt i powłok, Arkady, 1959.

[7] Ženišek A.: Interpolation polynomials on the triangle Numer Math. vol 45, 283-296, 1970.

[8] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, W-wa 1972.

[9] Zlamal M.: On the finite element method Numer Math. vol 12, 394-409, 1968.

[10] Михлин: Вариацонные методы в математической физике, Москва 1971

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИНОК

Р е з ю м е:

Пользуясь методом конечных элементов в статье даётся алгоритм минимализации функционала, определяющего полную потенциальную энергию физически нелинейной пластинки.

THE METHOD OF FINITE ELEMENTS IN PHYSICALY NONLINEAR PLATES

S u m m a r y

Basing on the method of finite elements an algorithm has been derived for the minimalization of the functional of the total potential energy of nonlinear plates.