ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Hieronim Leszczyński

NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW BRZEGOWYCH MAŁOWYNIOSŁYCH POWŁOK SPRĘŻYSTYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono numeryczną metodę rozwiązania problemu brzegowego opisującego pole przemieszczeń małowyniosłych powłok sprężystych. Zagadnienie sformułowane jest wariacyjnie. Wykazano, że rozwiązanie przybliżone zbieżne jest do rozwiązania dokładnego z rzędem $O(|h|)$ w przestrzeni $W_2^{(1)}$.

1. Wstęp

Zagadnienie wyznaczania przemieszczeń i naprężeń w powłokach małowyniosłych, poddanych działaniu pola sił było już, wstępnie, przedmiotem rozważań komunikatu [6]. W zakresie numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych dla powłok uzyskano w ostatnich latach istotne wyniki, publikowane sporadycznie w postaci artykułów w czasopismach technicznych i matematycznych. Nie ujmują one jednak całości zagadnienia. Prace te dotyczą głównie powłok walcowych. Autorzy pracy [11] stosują wariacyjno-różnicową metodę dla rozwiązywania zagadnień brzegowych teorii małowyniosłych powłok sprężystych.

W pracy podane są przykłady liczbowe; nie zajmowano się oszacowaniem, dowodami istnienia i jednoznaczności. W pracy [12] podano schemat różnicowy, dla układu równań teorii powłok obrotowych i walcowych; zbieżność rozwiązania bada się na przykładach liczbowych poprzez zmniejszenie podziałki.

Autorzy pracy [13] badają zbieżność schematów różnicowych, aproksymujących osiowo-symetryczne zadanie teorii sprężystości dla kołowej izotropowej powłoki walcowej; wykazano zbieżność schematów różnicowych z rzędem $O(h^2\ln(1/h))$.

Istnienie i jednoznaczność zagadnień brzegowych w teorii sprężystości przedstawione jest w pracach [10], [14].

W pracy [7] podano wariacyjno-różnicową metodę rozwiązywania zadań brzegowych dla równania biharmonicznego.
Praca niniejsza stanowi uogólnienie wyników pracy [7] na przypadek małowyniosłych powłok sprężystych. Stanowi ona kontynuację zagadnienia przedstawionego w komunikacie [6]. Problem brzegowy sformułowany jest tutaj w postaci wariacyjnej. Równania różnicowe uzyskuje się z warunku minimum od

powiedniego funkcjonału, dla którego jako dziedzinę przyjmuje się przestrzeń funkcji podobszarami liniowych, która jest podprzestrzenią przestrzeni $W_2^{(1)}$.

2. Sformułowanie problemu

Za podstawę rozważań przyjmujemy funkcjonał, którego minimalizacja - jak wykazuje się w teorii sprężystości - jest równoważna rozwiązaniu problemu brzegowego małowyniosłej powłoki sprężystej. Funkcjonał ten jest postaci:

$$I(u,v,w) = W(u,v,w) - \iint_D \vec{F}\cdot(u,v,w)\,dxdy - \int_{\partial D} (f_1,f_2)\cdot\vec{n}\,dl, \tag{2.1}$$

w której W jest energią wewnętrznych sił sprężystości; funkcjonał ten określony jest przez

$$W(u,v,w) = \frac{1}{2} C \iint_D \left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4})\right] dxdy + \frac{1}{2} \mathfrak{D} \iint_D \left[(\varkappa_1+\varkappa_2)^2 - 2(1-\nu)(\varkappa_1\varkappa_2-\tau^2)\right] dxdy, \tag{2.2}$$

w którym:

$$C = \frac{EH}{1-\nu^2} > 0, \quad D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} > 0.$$

Symbolami C,D,E,ν,H oznaczono wielkości stałe; u,v,w są funkcjami zmiennych x,y i określają przemieszczenia dowolnego punktu (x,y,z) powierzchni środkowej powłoki, odpowiednio w kierunku x,y i z; $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do ∂D; $f_1(u,v,w,\frac{\partial w}{\partial y})$, $f_2(u,v,w\ \frac{\partial w}{\partial x})$ są funkcjami liniowymi, określonymi na brzegu ∂D, por. [6]; $\vec{F}(F_1,F_2,F_3)$ jest polem wektorowym, określającym obciążenie; $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\omega;\ \varkappa_1,\ \varkappa_2,\tau$ są współrzędnymi tensorów określających odkształcenie powierzchni środkowej powłoki; mają one postać

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2\,k_{12} w;$$
$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{2.3}$$

gdzie: $k_1,k_2;k_{12}$ są kolejno stałymi określającymi krzywizny oraz skręcenie powierzchni środkowej powłoki.

Będziemy przyjmować, że rzut powierzchni środkowej powłoki na płaszczyznę XOY jest prostokątem

$$\bar{D} = \left\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\right\},$$

którego brzeg oznaczono symbolem ∂D.
W rozwiązywaniu zadania (2.1) stosuje się odpowiednio uogólniony sposób podejścia - przedstawiony w pracy [7].
Zgodnie z istotą tej metody, za dziedzinę funkcjonału przyjęto następujące zbiory funkcji:

$$N_2^{(2)} = \left\{f(x,y) : \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \in N_2^{(1)}\right\},$$

$$N_2^{(1)} = \left\{f(x,y) : f \in C^0, \quad f - \text{funkcja liniowa w trójkątnych obszarach}\right\},$$

$$N_2^{(o)} = \left\{f(x,y) : \qquad f - \text{funkcja stała w trójkątnych obszarach}\right\},$$

przy czym $u, v \in N_2^{(1)}$, $w \in N_2^{(2)}$.

3. Sformułowanie problemu wariacyjnego, równoważnego zadaniu (2.1)

Ze względu na to, że zbiór $N_2^{(2)}$ nie należy do dziedziny funkcjonału (2.2) zadanie (2.1) formułuje się dla układu funkcji:

$$(u,v,p,q) = (u,v, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}); \tag{3.1}$$

zamiast (3.1) stosować będziemy też oznaczenia

$$z = (z_1,z_2,z_3,z_4) = (u,v,p,q). \tag{3.1'}$$

Twierdzenie 1

Zadanie wyznaczenia minimum funkcjonału (2.1) jest równoważne zadaniu minimalizacji funkcjonału.

$$J(z,\lambda) = W(z) + V(z,\lambda) + L(z), \tag{3.2}$$

gdzie:

$$W(z) = W(u,v,w), \tag{3.4}$$

$$V(z,\lambda) = \iint_D \lambda(xy)\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)dxdy \tag{3.5}$$

$$L(z) = -\iint_D \vec{F}\cdot(u,v,w)dxdy - \int_{\partial D} (f_1,f_2)\cdot\vec{n}\, dl. \tag{3.6}$$

Dowód

A. Funkcjonał (2.1) rozważamy ze względu na w(x,y) w przestrzeni $W_2^{(2)}$ oraz ze względu na u,v w przestrzeni $W_2^{(1)}$.
Jeśli $w \in W_2^{(2)}$, to $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \in W_2^{(1)}$, co wynika z określenia tych przestrzeni.

B. Niech $w(0,0) = 0$; założenie to nie jest sprzeczne z przyjętymi warunkami brzegowymi zadania (2.1).
Przy tym założeniu, dla dowolnych $p,q \in W_2^{(1)}$ i takich, że $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, istnieje jeden element $w \in W_2^{(2)}$, dla którego spełnione są równości $\frac{\partial w}{\partial x} = p$, $\frac{\partial w}{\partial y} = q$.

C. Warunek $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ jest warunkiem koniecznym istnienia minimum funkcjonału (3.2); przy tym warunku $V(z,\lambda) = 0$ dla dowolnego λ.

D. Wnioskiem z A,B,C jest podane wyżej twierdzenie 1.

W dalszych rozważaniach stosować będziemy normę określoną równością:

$$\|z\|^2_{W_2^{(1)}} = \iint_D \sum_{i=1}^{4} \left[\left(\frac{\partial z_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial y}\right)^2\right] dxdy, \tag{3.7}$$

przy czym

$$\|z\|^2_{W_2^{(1)}} = \|z_1,z_2,w\|, \text{ jeżeli } \frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{\partial z_4}{\partial x}.$$

Określenie (3.7) spełnia postulaty normy w zbiorze funkcji, w którym różnica dwu dowolnych elementów nie jest wielkością stałą, por. [8]; spełnienie tego warunku zapewnia następujące założenie: jeżeli na podzbiorach brzegu (różnych od odcinka) zadane będą funkcje u,v,w, to przyjmować będziemy, iż są one równe zeru.

4. Dodatnia określoność funkcjonału (3.4)

Twierdzenie 2

Jeżeli:

$$\iint_D \left(\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 dxdy \geqslant \mu \iint_D \left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2\right] dxdy, \tag{4.1}$$

gdzie $\mu \geqslant \mu_0$, to

$$W(z) \geqslant M\|z\|^2. \tag{4.2}$$

W dowodzie twierdzenia korzysta się z nierówności:

$$\underset{\nu\in[0,1)}{\forall} \quad \underset{a,b}{\forall} \left\{(a+b)^2 - 2(1-\nu)(ab-c^2) \frac{1-\nu^2}{2}(a^2+b^2+2c^2)\right\} \tag{4.3}$$

$$\underset{\alpha>0}{\forall} \left(|ab| \leqslant \frac{1}{4\alpha} a^2 + \alpha b^2\right) \tag{4.4}$$

oraz z twierdzenia o zanurzaniu przestrzeni, por. [8]. Warunek (4.1) jest nierównością Korna prawdziwą dla teorii sprężystości, por. [9].

5. Wariacja funkcjonału

Wariacja funkcjonału kwadratowego (3.2) jako część główna przyrostu funkcjonału jest funkcjonałem dwóch zmiennych, liniowym względem każdej z nich; ma ona postać:

$$\delta J(z,\lambda_1) = W(z,\hat{\xi}) + \iint_D \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial \hat{\xi}_3}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\xi}_4}{\partial x}\right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial z_3}{\partial y} - \frac{\partial z_4}{\partial x}\right)\right] dxdy + L(\hat{\xi}), \tag{5.1}$$

gdzie:

$$w(\hat{\xi},\hat{\xi}) = 2W(\hat{\xi}).$$

Wariacji (5.1) można nadać postać:

$$\delta J(z,\lambda_1) = \langle A_1(z,\lambda_1) - (F^*,0),(\hat{\xi},\lambda_2)\rangle + \langle A_2(z,\lambda_1) - f^*, \hat{\xi}\rangle',$$

gdzie: $\langle u,v\rangle$ jest iloczynem skalarnym w obszarze D;
$\langle u,v\rangle'$ - iloczynem skalarnym na ∂D; A_1, (A_2) - operatorem różniczkowym drugiego (pierwszego) rzędu.

Warunkiem koniecznym na to, by funkcjonał (3.2) dla argumentu (z,λ_1) osiągał minimum, jest tożsamość:

$$\underset{\lambda_2}{\forall}\ \underset{\xi \in B \subset W_2^{(1)}}{\forall} (\delta J=0), \tag{5.3}$$

gdzie:

$$B = \left\{\xi : \xi \in W_2^{(1)},\ \left[z_i(x,y) = a_i(x,y) \Longrightarrow \xi_i = 0\right]\right\},$$

$a_i(x,y)$, $i = 1(1)4$ są tutaj danymi funkcjami występującymi w warunkach brzegowych.
Z (5.1) wynika, że jeśli (3.2) osiąga w (z,λ_1) minimum, to warunek (5.3) jest równoważny następującemu warunkowi:

$$\underset{\xi \in B}{\forall} (\delta J(z,\lambda) = W(z,\xi) + V_1 + L(\xi) = 0, \tag{5.4}$$

gdzie:

$$V_1 = \iint\limits_D \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_4}{\partial x}\right) dxdy. \tag{5.5}$$

6. Istnienie rozwiązania

Niech zbiór $\overline{D}_h$ będzie zbiorem punktów prostokątnego obszaru $\overline{D}$ o wymiarach (a,b). Elementy $\overline{D}_h$ są wierzchołkami prostokątnych obszarów o bokach $h = (h_1,h_2) = (\frac{a}{N_1}, \frac{b}{N_2})$, gdzie N_1,N_2 są liczbami naturalnymi. Zbiór punktów wewnętrznych zbioru $\overline{D}_h$ oznaczać będziemy symbolem D_h, zaś $\overline{D}_h/D_h = \partial D_h$. ∂D_h jest brzegiem zbioru D_h. Dla ustalonych N_1,N_2 oraz $\lambda \in N_2^{(0)}(h)$, $z \in N_2^{(1)}(h)$ funkcjonały (3,4), (3,5) będą funkcjami kwadratowymi, zaś funkcjonał (3,6) funkcją liniową wielu zmiennych.
Zmiennymi tymi będą wartości $\lambda \in N_2^{(0)}(h)$ w poszczególnych trójkątach obszaru D oraz wartości funkcji wektorowej z, w punktach zbioru $\overline{D}_h$. Funkcjonał (3.2) dla $z \in N_2^{(1)}(h)$, $\lambda \in N_2^{(0)}(h)$ jest funkcją kwadratową wielu zmiennych. Na mocy tw. 2 - o dodatniej określoności funkcjonału (2.2) mamy:

$$W(z) \geqslant M \|z\|^2_{W_2^{(1)}}, \tag{6.1}$$

gdzie M jest liczbą stałą, dodatnią, niezależną od z.

Oznaczając przez:

$$J(z,\lambda)\Big|_{\substack{z\in N_2^{(1)}(h)\\ \lambda\in N_2^{(0)}(h)}} = \Psi(\vec{z},\vec{\lambda}), \qquad (6.2)$$

gdzie:

$$\vec{z} = \{z_{ij}\}, \quad i = 0(1)\,N_1, \quad j = 0(1)N_2;$$
$$\vec{\lambda} = \begin{cases}\{\lambda_{ij}\} & i = 0(1)N_1; \quad j = 0(1)N_2,\\ \{\lambda_{ij}\} & i = 0(1)N_1-1, \quad j = 0(1)N_2-1,\end{cases}$$

wtedy możemy warunek konieczny i dostateczny istnienia minimum funkcjonału (3.2) w $N_2^{(1)}(h)$, $N_2^{(0)}(h)$ napisać:

$$\operatorname{grad}\Psi = 0 \qquad (6.3)$$

lub

$$d\Psi = 0. \qquad (6.4)$$

Z określenia (6.3) wynika równość

$$\delta J(z,\lambda) = d\Psi. \qquad (6.5)$$

Różniczkę $d\Psi$ można zapisać w postaci

$$d\Psi(\vec{z},\lambda_1) = W_h(\vec{z},\vec{\xi}) + V_h(\vec{z},\vec{\lambda}_1;\ \vec{\xi},\vec{\lambda}) + L_h(\vec{\xi}) \qquad (6.6)$$

lub

$$d\Psi(\vec{z},\lambda_1) = \langle A_1(h)(\vec{z},\vec{\lambda}_1)-(\vec{F}_h^*,\vec{0}),(\vec{\xi},\vec{\lambda}_2)\rangle + \langle A_2(h)(\vec{z},\vec{\lambda}_1) - f_h^*, \vec{\xi}\rangle \qquad (6.7)$$

gdzie symbol $\langle\cdot\rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów.

Równanie (6.3) ma zatem, zgodnie z (6.7) - postać

$$A_1(h)(\vec{z},\vec{\lambda}_1)-(\vec{F}_h^*,0) = 0 \qquad i \neq 0,N_1, \quad j \neq 0,\ N_2;$$

$$A_2(h)(\vec{z},\vec{\lambda}_1) - f_h^* = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 0,N_1, \quad j = 0(1)\ N_2 \text{ lub}\\ i = 0,N_2, \quad i = 0(1)N_1.\end{array}$$

Równania (6.3), (6.8) są układami równań liniowych określających pośrednio element $z \in N_2^{(1)}(h)$, który minimalizuje funkcjonał (3.2). Z postaci operatora $A = (A_1(D), A_2(\partial D))$ wynika, że zagadnienie wartości i funkcji własnych wystąpi wtedy, gdy poszczególne krzywizny k_1, k_2, k_{12} będą równe zero. Wówczas 0 może być wartością własną operatora A i odpowiadające jej funkcje własne są funkcjami liniowymi określającymi sztywne przesunięcie i obrót.

Z warunku (6.1) wynika, że układ (6.3) jest układem oznaczonym. Ponieważ dla układu tego istnieje rozwiązanie dla każdego $|h| > 0$, można więc skonstruować ciąg $\{z_n, \lambda_n\} = \{z_n(\frac{h}{2^n}), \lambda(\frac{h}{2^n})\}$ zbieżny w $W_2^{(1)}$, minimalizujący funkcjonał (3.2), tzn.

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} J(z_n, \lambda_n) = \inf_{\substack{z \in W_2^{(1)} \\ \frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{\partial z_4}{\partial x}}} J(z, \lambda) \tag{6.9}$$

przy czym $z(\frac{h}{2^n}) \in N_2^{(1)}(\frac{h}{2^n})$, $\lambda(\frac{h}{2^n}) \in N_2^{(0)}(\frac{h}{2^n})$ i (z_n, λ_n) jest rozwiązaniem układu (6.3).

Lemat 1

Jeżeli $z, \hat{s} \in W_2^{(1)}$, to

$$|W(z, \hat{s})| \leq M_1 \|z\| \cdot \|\hat{s}\|_{W_2^{(1)}}. \tag{6.10}$$

W dowodzie lematu korzysta się z twierdzenia o zanurzaniu (por. [8]) oraz z określenia iloczynu skalarnego w L_2 i norm w L_2 i $W_2^{(1)}$.

7. Rząd zbieżności ciągu rozwiązań

Niech $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ będzie rozwiązaniem zadania (2.1).

Twierdzenie 3

Jeżeli $z \in C^2(\bar{D})$, to

$$\|z - z_n\|_{W_2^{(1)}} = 0. \tag{7.1}$$

Dowód: Funkcje z, z_n minimalizują funkcjonał (3.2). Spełniają zatem następujące tożsamości:

$$\forall_{\xi \in B} \left(W(z,\xi) + V_1(\lambda,\xi) + L(\xi) = 0\right) \tag{7.2}$$

$$\forall_{\xi \in N_{\xi 2}^{(1)}\left(\frac{h}{2^n}\right)} \left(W(z_n,\xi) + V_1(\lambda_n,\xi) + L(\xi) = 0\right), \tag{7.3}$$

gdzie $N_{\xi 2}^{(1)} \subset B$, stąd:

$$\forall_{\xi \in N_{\xi 2}^{(1)}} \left(W(z-z_n,\xi) + V(\lambda-\lambda_n,\xi) = 0\right). \tag{7.4}$$

Niech $\{\tilde{z}_n\}$ oznacza funkcję należącą do $N_2^{(1)}\left(\frac{h}{2^n}\right)$ i taką, że $\tilde{z}_n = z$ w punktach obszaru $\overline{D}_h$; przez Δz oznaczamy funkcję określoną równością

$$z = \tilde{z}_n + \Delta z. \tag{7.5}$$

Podstawiając (7.5) do (7.4) otrzymujemy

$$\forall_{\xi \in N_{\xi 2}^{(1)}} \left(W(\tilde{z}_n - z_n,\xi) + W(\Delta z,\xi) + V_1(\lambda-\lambda_n;\xi) = 0\right). \tag{7.6}$$

Podstawiając w (7.6) w miejsce ξ różnicę $\tilde{z}_n - z_n$ (ponieważ $\tilde{z}_n - z_n \in N_2^{(1)}$) otrzymujemy równanie

$$2W(\tilde{z}_n - z_n) + W(\Delta z,\ \tilde{z}_n - z_n) + V_1(\lambda-\lambda_n;\ \tilde{z}_n) = 0. \tag{7.7}$$

Korzystając z lematu 1 otrzymujemy:

$$\left|W(\Delta z,\ \tilde{z}_n - z_n)\right| \leqslant M_2 \|\Delta z\|\ \|\tilde{z}_n - z_n\|, \tag{7.8}$$

stąd i na podstawie (4.4) otrzymujemy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \left(\left|W(\Delta z,\ \tilde{z}_n - z_n)\right| \leqslant M_3\left(\frac{1}{4\varepsilon}\ \|\Delta z\|^2 + \varepsilon\ \|\tilde{z}_n - z_n\|^2\right)\right). \tag{7.9}$$

Wykorzystując (7.6), (7.7) i (7.8) uzyskujemy następujące oszacowanie (por. [7]) dla $\|\Delta z\|$ i $\|\tilde{z}_n - z_n\|$

$$\|\Delta z\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|) \tag{7.10}$$

$$\|\tilde{z}_n - z_n\| = O(|h|). \tag{7.11}$$

Podstawiając (7.10), (7.11) do nierówności

$$\|z-z_n\| \leqslant \|\Delta z\| + \|\tilde{z}_n-z_n\|$$

otrzymujemy (7.1), czego należało dowieść.

LITERATURA

[1] Borkowski S.: a) Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (1965-1967), Mech.Teor.Stos., 2,7) 1969, 107-153, b) Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok, Sympozjum "Konstrukcje powłokowe", Kraków 1974, s. 35.

[2] Borkowski S., Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie problemu brzegowego teorii naprężeń cieplnych, maszynopis, Gliwice 1971.

[3] Borkowski S., Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie płaskich problemów brzegowych teorii naprężeń cieplnych, maszynopis, Gliwice 1972.

[4] Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych płyt izotropowych, Met.Numer..., Konf., Solina 73.

[5] Marszał J.: Numeryczne rozwiązanie zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych płyt izotropowych (komunikat), ZN.Pol.Śl. Mat.-Fiz.,z. 25, 1974, (189-193).

[6] Leszczyński H.: Numeryczne rozwiązanie problemów brzegowvch teorii naprężeń cieplnych małowyniosłych powłok sprężystych (komunikat) ZN. Pol.Śl.,Mat.-Fiz., z. 25, 1974, (213-218).

[7] Marszał J.: Numeryczne rozwiązywanie zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych płyt izotropowych, Zastosow. Matemat. 1975 (praca w druku).

[8] Sobolew S.L.: Einige Anwendungen der Funktional - analysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Akademie-Werlag, Berlin 1964.

[9] S.G. Michlin: Problema minimuma kwadraticznogo funkcjonała, Moskwa - Leningrad 1952.

[10] Fischera G.: Existence Theorems in Elasticity, Berlin 1972.

[11] W.N. Kisłookij, W.G. Kobijew: Issledowanije obołoczek so słożnymi parametrami, Soprotiw.mater. i teoria sooruż.wyp. XY, Kijew - 1971.

[12] E.T. Diakonow, W.K. Nikołajew:, O reszenii niekotorych zadacz teorii sietczatych obołoczek, Żurn.wycz.mat. i mat.fiz. 1973, 13 Nr 4 (938--951).

[13] I.N. Mołczanow, J.F. Galba: O schodimosti raznostnych schem dla urawnienii krugowoj cilindriczeskoj obołoczki, Dokłady A. N. SSSR, Mat. Fiz., t. 218 Nr,Nr 1,2,3, 1974 (287-290).

[14] G.Fichera: Existence Theorems in Linear and Semi-Linear Elasticity, ZAMM 54, 1974 (24-36).

[15] Własow W.Z: Obszczaja teorija obołoczek, Moskwa 1949.

НУМЕРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАЛОВОЛНИСТЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Р е з ю м е

В статье представлен нумерический метод решения краевой задачи, описывающей поле перемещения маловолнистых упругих оьолочек. Задача решается вариационно. Показано, что приближенное решение совпадает с точным решением ряда $O(|h|)$ в пространстве $W_2^{(1)}$.

A NUMERICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY PROBLEMS OF ELASTIC SHALLOW SHELLS

S u m m a r y

The paper discusses a numerical solution method of a boundary problem describing the displacement field of elastic shalow shells. The problem has been formulated variationally. The approximated solution is in agreement with the exact solution withim the range of $O(|h|)$ in the $W_2^{(1)}$.