

Monika Marek

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMÓW BRZEGOWYCH TEORII PRĘTÓW ZGINANYCH
DLA OŚRODKA FIZYCZNIE NIELINIOWEGO

Streszczenie: W niniejszej pracy podano algorytm numerycznego rozwiązania fizycznie nieliniowych problemów brzegowych pręta zginanego, dla którego modelem jest ośrodek fizycznie nieliniowy (Ośrodek Ramberga-Osgooda).

1. Wstęp

W pracy zajęto się problemem numerycznego rozwiązania zadań brzegowych prętów zginanych; problem taki został zamieniony na równoważne mu zadanie wariacyjne. Minimalizację funkcjonału, będącego energią potencjalną, przeprowadzono metodą wariacyjno-różnicową. Analiza ogólnie rozpatrywanego zagadnienia przedstawiona jest w monografii H. Kauderera [4].

Ogólna teoria nieliniowa fizycznie podana została też przez A. Cardona [3]; pewnymi szczególnymi problemami numerycznymi zajmowali się J.A. Bignoli [1], S. Borkowski [2], T. Nikolovski [5], G.R. Venkatesvara [6].

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrywać będziemy pręt o płaszczyźnie symetrii, przechodzącej przez oś pręta. Przyjmujemy, że pręt jest wykonany z materiału, którego modelem fizycznym jest Ośrodek Ramberga-Osgooda. Szusznym więc będzie równanie konstytutywne:

$$\sigma = E\varepsilon(1 - K\varepsilon^R), \quad (2.1)$$

gdzie E, K, R - stałe doświadczalne.

Do rozwiązania występujących w zadaniu problemów brzegowych, nieliniowych stosujemy podejście wariacyjne por. [4]. Z odpowiednich twierdzeń mechaniki ośrodków odkształcalnych wynika, że w stanie równowagi całkowita energia potencjalna ośrodka ma postać

$$V = \int_V^u \Phi(\varepsilon_{ij}) dv - \int_V X_i u_i dv - \int_{\partial V} \hat{X}_i u_i df. \quad (2.2)$$

Adoptując równanie (2.2) dla pręta zginanego (podano to w komunikacie [7]) otrzymujemy, że całkowity potencjał belki zginanej, dla której modelem jest ośrodek Ramberga-Osgooda, wyraża się następująco:

$$\begin{aligned}
 V[v(x)] = & \frac{1}{2} E \int_I I_z \left(\frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \right)^2 \left[1 - \mu \left(\frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \right)^{R-1} \right] dx + \\
 & + \int_I m(x) \frac{d\bar{v}(x)}{dx} dx - \int_I q(x) \bar{v}(x) dx + \\
 & + \sum_{\alpha} M_{\alpha} \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \Big|_{x=x_{\alpha}} - \sum_{\alpha} P_{\alpha} \bar{v}(x_{\alpha}). \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Minimalizacja tego funkcjonału może być przeprowadzona tradycyjnymi metodami, które w ogólnym ujęciu prowadzą do skomplikowanych równań nieliniowych problemu, bądź też, po przyjęciu w rozpatrywanym przedziale $(x, x+h)$ kształtu funkcji $v(x)$ i wykonaniu całkowania—uzyskujemy macierz sztywności całego układu, co jest charakterystyczne dla metody elementów skończonych. Można wreszcie minimalizować funkcjonał przez wprowadzenie funkcjonałów iteracyjnych por. [2]. W naszych rozważaniach zajmiemy się wyznaczeniem macierzy sztywności układu oraz zbudowaniem procesu iteracyjnego.

3. Minimalizacja potencjału

Ponieważ całkowity potencjał belki zginanej, przedstawiony w postaci:

$$V[v(x)] = V_M + V_{q,m} + V_{P,M}, \quad (3.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 V_M &= \frac{1}{2} E \int_I I_z \left(\frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \right)^2 \left[1 - \mu \left(\frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \right)^{R-1} \right] dx \\
 V_{q,m} &= \int_I m(x) \frac{d\bar{v}(x)}{dx} dx - \int_I q(x) \bar{v}(x) dx, \\
 V_{P,M} &= \sum_{\alpha} M_{\alpha} \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \Big|_{x=x_{\alpha}} - \sum_{\alpha} P_{\alpha} \bar{v}(x_{\alpha})
 \end{aligned}$$

osiąga minimum w stanie równowagi statycznej ośrodka, więc warunkiem koniecznym tego minimum będzie równanie:

$$\delta V[\bar{v}(x)] = 0. \quad (3.2)$$

W (3.1) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \kappa; \quad \mu = \frac{2K}{R+1} \cdot \frac{I_Z(R+1)}{I_Z}; \quad I_Z = I_Z(2) = \int_{\mathcal{F}} y^2 dydz;$$

$$I_Z(R+1) = \int_{\mathcal{F}} (-y)^{R+1} dydz;$$

V_M - potencjał sił wewnętrznych zginania,

$V_{q,m}$ - potencjał obciążeń zewnętrznych, ciągłych,

$V_{p,M}$ - potencjał sił zewnętrznych, skupionych.

Przejdziemy do określenia wariacji funkcjonałów przedstawionych w (3.1).

a) Wariacja potencjału sił wewnętrznych

Na podstawie równania

$$V_M = \frac{1}{2} E \int_I I_Z \left(\frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \right)^2 \left[1 - \mu \left(\frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \right)^{R-1} \right] dx \quad (3.3)$$

uzyskamy

$$\delta V_M = \frac{1}{2} E \delta \int_I I_Z \kappa^2 (1 - \mu \kappa^{R-1}) dx = E \int_I I_Z \kappa \left[1 - K (I_Z(R+1) / I_Z) \kappa^{R-1} \right] \delta \kappa dx. \quad (3.4)$$

Uwzględniając w (3.4), że moment zginający

$$M = D\kappa$$

czyli

$$M = \kappa EI_Z \left[1 - K (I_Z(R+1) / I_Z) \kappa^{R-1} \right] \quad (3.5)$$

otrzymujemy równanie

$$\delta V_M = \int_I M \delta \kappa dx, \quad \kappa \in [0, L], \quad (3.6)$$

gdzie L jest długością pręta.

Równanie (3.6) zastępujemy związkiem

$$\delta V_M = \int_I M \delta x dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{l_k=k \cdot h}^{l_{k+1}=(k+1)h} M \delta x dx \quad (3.7)$$

i stosujemy zmianę zmiennych

$$\begin{matrix} x \\ k \end{matrix} = \begin{matrix} x \\ k \end{matrix} - k \cdot h; \quad \begin{matrix} x \\ k \end{matrix} \in [l_k=k \cdot h, l_{k+1}=(k+1)h], \quad \bigwedge_{k=0,1,2,\dots,(n-1)} x \in [0, h]. \quad (3.8)$$

Uwzględniając (3.8), (3.7) uzyskujemy:

$$\delta V_M = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^h \delta \bar{x} \bar{M} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \delta V_{M_k} \quad (3.9)$$

Następnie, w k -tym ($k=0,1,2,\dots,n-1$) przedziale, przyjmujemy funkcję linii ugięcia belki, w postaci

$$v(x) = 1 \cdot \alpha_1 + x \alpha_2 + x^2 \alpha_3 + x^3 \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \hat{Q} \cdot \alpha, \quad (3.10)$$

gdzie

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, x^3 \end{bmatrix}.$$

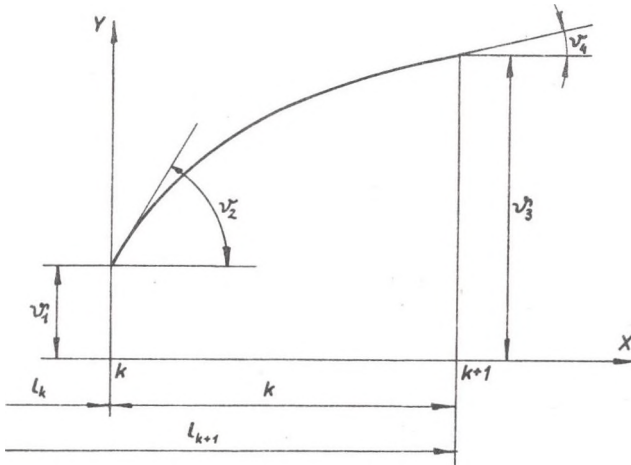
Uwzględniając warunki na brzegach przedziału, por. rys. 1 mamy

$$v(0) = v_1 = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \alpha_2 + 0 \alpha_3 + 0 \alpha_4,$$

$$\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} = v_2 = 0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \alpha_3 + 0 \alpha_4,$$

$$v(h) = v_3 = 1 \cdot \alpha_1 + h \alpha_2 + h^2 \alpha_3 + h^3 \alpha_4,$$

$$\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=h} = v_4 = 0 \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 2h \alpha_3 + 3h^2 \alpha_4.$$



Rys. 1

co zapisujemy w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

oznaczając przez

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy wówczas zamiast (3.11), równanie

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.12)$$

Przyjmując, że $\det \mathbf{A} \neq 0$ oraz

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{h^2} & -\frac{2}{h} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h} \\ \frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

mamy

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v} \quad (3.14)$$

Podstawiając (3.14) do (3.10) uzyskamy

$$\mathbf{v}(x) = \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{v}, \quad (3.15)$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^{-1}.$$

Różniczkując równość (3.15) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{d^2 \mathbf{v}(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \hat{\mathbf{B}}}{dx^2} \mathbf{v} = \frac{d^2 \hat{\mathbf{Q}}}{dx^2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{v} = (\mathbf{B} \mathbf{v})^T = \\ &= \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{v}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{Q}^T, \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \frac{d^2 \hat{\mathbf{B}}}{dx^2}.$$

Podstawiając (3.16) do (3.5) uzyskujemy:

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \chi = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{D} \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v} \quad (3.17)$$

skąd

$$\delta v_M \approx \int_0^h \delta \chi M dx = \int_0^h \delta [\mathbf{v}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{Q}^T] \mathbf{D} \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} dx = (\delta \mathbf{v})^T \mathbf{K} \mathbf{v},$$

gdzie

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{k} \mathbf{A}^{-1}; \quad \mathbf{K} = \int_0^h \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} \, dx \quad (3.18)$$

jest macierzą sztywności elementu.

Ostatecznie wariacja potencjału sił wewnętrznych (momentów zginających dla elementu) wynosi

$$\delta V_M \approx (\delta \mathbf{v})^T \mathbf{K} \mathbf{v} = \delta V_M^{(n)}, \quad (3.19)$$

gdzie n - jest liczbą elementów.

Sumując (3.19) otrzymamy dla całej belki:

$$\delta V_M \approx \sum_{k=0}^{n-1} (\delta \mathbf{v})_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k = \delta V_M^{(n)}. \quad (3.20)$$

Dokonując prostych przeliczeń w (3.18) otrzymujemy, że macierz sztywności dla elementu określona jest równaniem

$$\mathbf{K}_i = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{K} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_N, \quad (3.21)$$

gdzie \mathbf{K}_L - część liniowa, \mathbf{K}_N - część nieliniowa macierzy.

b) Wariacja potencjału obciążeń zewnętrznych

Pamiętamy, że por. (3.1), potencjał obciążeń ciągłych, zewnętrznych ma postać

$$V_{q,m} = \int_I m(x) \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \, dx - \int_I q(x) \bar{v}(x) \, dx.$$

Wariacja zaś tego potencjału określona jest przez

$$\delta V_{q,m} = -\delta \left[\int_I q(x) v(x) \, dx + \int_I -m(x) \frac{dv(x)}{dx} \right] = -\int_I (\delta \mathbf{r})^T \mathbf{p} \, dx, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} v(x) \\ \frac{dv(x)}{dx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q(x) \\ -m(x) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Analogicznie jak poprzednio zamieniamy całkę $\int_l ()$ na sumę całek $\int_0^h ()$

$$\begin{aligned} \delta V_{q,m} &= - \int_l (\delta f)^T p dx = - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{l_k}^{l_{k+1}} (\delta f)^T p dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^h (\delta f)_k^T p_k dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \delta V_k^{q,m}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdzie

$$\delta V_k^{q,m} = \int_0^h (\delta f)_k^T p_k dx. \quad (3.24)$$

Następnie uwzględniając (3.10) i (3.14) i podstawiając do (3.22) otrzymujemy

$$f_k = N_k \psi, \quad (3.25)$$

gdzie N jest macierzą funkcji kształtu.

Ostateczna wariacja potencjału obciążeń zewnętrznych, ciągłych wynosi, dla elementu

$$\delta V_{q,m} = - \int_0^h [\delta(N\psi)]^T p dx = - (\delta\psi)^T \int_0^h N^T p dx, \quad (3.26)$$

a dla całej belki

$$\delta V_{q,m} = - \sum_{k=0}^{n-1} (\delta\psi)_k^T \int_0^h N_k^T p_k dx. \quad (3.27)$$

c) Wariacja potencjału sił zewnętrznych, skupionych

Potencjał sił zewnętrznych skupionych przedstawiono w (3.1) jako:

$$V_{P,M} = \sum_{\alpha} M_{\alpha} \left. \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \right|_{x=x_{\alpha}} - \sum_{\alpha} P_{\alpha} \bar{v}(x_{\alpha})$$

Obliczając wariację tego funkcjonału otrzymujemy wzory analogiczne do (3.26) i (3.27):

$$\delta V_{P,M} = - (\delta \mathbf{v})^T \sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha}^T \mathbf{P}_{\alpha} \tag{3.28}$$

$$\delta V_{P,M} = - \sum_{k=0}^{n-1} (\delta \mathbf{v})^T \sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha}^T \mathbf{P}_{\alpha},$$

w których: $\delta V_{P,M}$ - wariacja potencjału sił zewnętrznych, skupionych dla elementu, a $\delta V_{P,M}$ - wariacja potencjału sił zewnętrznych, skupionych dla całej belki.

W (3.28) przyjęto następujące oznaczenia

$$\mathbf{N}_{\alpha}^T = \mathbf{N}^T(x=x_{\alpha}), \quad \mathbf{P}_{\alpha} = \mathbf{P}(x=x_{\alpha}), \quad \mathbf{P}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\alpha} \\ \mathbf{M}_{\alpha} \end{bmatrix}.$$

4. Równanie algebraiczne metody

Podstawiając (3.20), (3.27), (3.28) do (3.1) otrzymujemy

$$\delta v = \sum_{k=0}^{n-1} (\delta \mathbf{v})^T \left[\mathbf{k}_k \mathbf{v}_k - \int_0^h \mathbf{N}_k^T \mathbf{P} - \sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha}^T \mathbf{P}_{\alpha} \right] = 0, \tag{4.1}$$

skąd

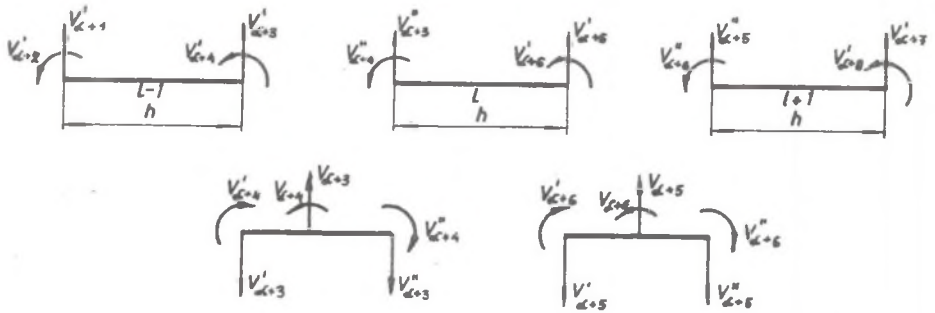
$$\mathbf{k}_1 \mathbf{v}_1 - \int_0^h \mathbf{N}_1^T \mathbf{P} - \sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha}^T \mathbf{P}_{\alpha} = 0. \tag{4.2}$$

Jeżeli $\alpha = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ w (4.2) przez R_1 oznaczymy reakcję od sił zewnętrznych, to otrzymamy równanie równowagi dla elementu 1:

$$\mathbf{k}_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{V}_1 \quad 1=0, 1, 2, \dots, (n-1), \tag{4.3}$$

gdzie \mathbf{V} - macierz wielkości wewnętrznych.

Dla analizowanego układu prętowego zajmiemy się sposobem budowy macierzy sztywności. W tym celu podzielimy pręt na $n-1$ elementów, oznaczając siły węzłowe tak jak to przedstawiono na rys. 2.

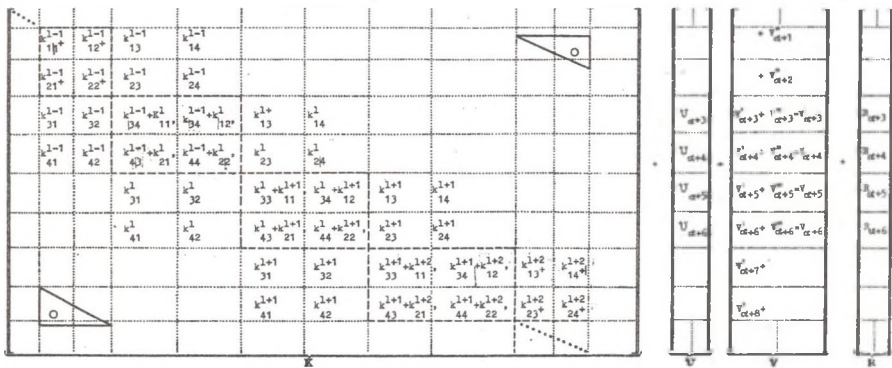


Rys. 2

Przyjmując warunki równowagi dla poszczególnych węzłów i uwzględniając (4.3) uzyskamy macierz sztywności dla całego układu; ma ona postać

$$K \cdot v = V + R = F \tag{4.4}$$

lub w postaci rozwiniętej



Źwiązek (4.4) łącznie z warunkami brzegowymi daje nam dwa niezależne układy równań algebraicznych, z jednego z nich wyznaczymy poszukiwane parametry w węzłach, a drugim możemy się posłużyć przy wyznaczaniu oddziaływań, co jest szczególnie ważne w układach statycznie niewyznaczalnych.

Dla równania (4.5) zbudujemy proces iteracyjny pozwalający wyznaczyć parametry $\mathbf{U}(x)$ (ugięcia i kąty ugięcia).

Proces iteracyjny budujemy w postaci

$$(\mathbf{K}_L - \mathbf{K}_N^{(n)}) \mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{F} \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (4.6)$$

a schemat algorytmu rozwiązania przedstawiamy w postaci

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_N^{(0)} = 0; \quad \mathbf{K}_L \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{U}^{(1)} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}^{(1)} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{K}_N^{(1)} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{K}_N^{(1)} \\
 \downarrow \\
 (\mathbf{K}_L - \mathbf{K}_N^{(1)}) \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{F} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{U}^{(2)} \\
 \vdots
 \end{array} \quad (4.7)$$

W rozważaniach niniejszych wyznaczono macierz sztywności analizowanego układu prętowego oraz zbudowano proces iteracyjny; w dalszych pracach zajmujemy się budową programów dla rozwiązywania algorytmu podanego w (4.6), (4.7).

LITERATURA

[1] Bignoli J.A.: Analisis matricial de estructuras no lineares bajo cargas proporcionales, An.Acad.Nac.Cienc.Exact.Fis.Y Natur.Buenos Aires, 2, 1969, 181-230.

[2] Borkowski S.: a) Niektóre problemy wariacyjnego formułowania problemów brzegowych ośrodków nieliniowych fizycznie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Mat.-Fiz." 25, 1974, 181-188.

b) Nieliniowe równania przemieszczeniowe kratownic przestrzennych. Materiały z III Ogólnopolskiej narady matematyków, Solina 1973, str. 15.

- [3] Cardan A.: Non - linear elastic constitutive equations. Intern. J. Non - linear Mech. 4, 7 (1972), 347-352.
- [4] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Spriger Verlag 1958.
- [5] Nikolovski T.: Trenutna matrica krutosti nelinearnog elementa tipa Ramberg - Osgood, Technika, 5, 27 (1972), 877-882.
- [6] Venkatesvara R.G.: Murty Krishna A.V.: An alternate form of the Ramberg - Osgood formula for matrix displacement, Nucl.Eng. a Design 17, 1974, 297-308.
- [7] Marek M.: Wariacyjne ujęcie problemu brzegowego zginania pręta prostego dla ośrodka nieliniowego fizycznie, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Mat.-Fiz." 25, 1974, 195-199.

НУМЕРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ
ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

В статье представлен способ решения краевых задач изгибаемого стержня, моделью которого является физически нелинейная среда Каударева. Проблема численного решения заменена равновесной вариационной задачей. Этот способ характерен для метода конечных элементов.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS IN THE THEORY
OF BEND BEAMS FOR A NONLINEAR MEDIUM

S u m m a r y

The paper presents a numerical method of solving the boundary problems of a bend in the case of a nonlinear medium. The numerical solution of the boundary problem has been changed for any equivalent variation problem, where after the assumption of the shape function in the considered interval $(x, x+h)$ and after integration the stiffness matrix of the system is calculated.

This formulation is characteristic for the method of finite elements.