ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Julian Marszał

NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ BRZEGOWYCH TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH TARCZ ORTOTROPOWYCH

Streszczenie: W niniejszej pracy podano numeryczną metodę wyznaczania funkcji (obszarami liniowej), minimalizującej funkcjonał, odpowiadający zadaniu brzegowemu tarcz ortotropowych; rząd zbieżności rozwiązania przybliżonego (w normie przestrzeni W_2^1) : $\|\Delta\|_{W_2^1} = O(|h|)$.

1. Wstęp

W pracy [1] podano wariacyjno-różnicową metodę rozwiązywania płaskich zadań brzegowych teorii sprężystości ośrodka izotropowego. Wynikiem rozważań zawartych w pracy [1] jest możliwość uzyskania przybliżonego rozwiązania o błędzie $\|\Delta\| = O(|h|^2)$, w normie siatkowej.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę rozwiązywania tego typu zadań, w zastosowaniu do zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych tarcz ortotropowych. Rząd zbieżności rozwiązania przybliżonego, w normie przestrzeni W_2^1, jest równy 1 ($\|\Delta\|_{W_2^1} = O(|h|)$). Odpowiada to drugiemu rzędowi zbieżności w normie siatkowej. Przytoczono również sposób otrzymania metody o wyższym od 1 rzędzie zbieżności.

Omówiony tutaj sposób jest uogólnieniem badań I.G. Biełuchiny [1] na zadania ortotropowe, przy uwzględnieniu wpływów termicznych. Przedstawiona tutaj problematyka jest kontynuacją wcześniejszych prac autora, por. [5]; aktualna problematyka numeryczna ustrojów powierzchniowych omówiona jest w pracy [6].

2. Wariacyjne sformułowanie zadania

Należy znaleźć taką funkcję wektorową $\vec{w}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$; $(x,y)\in D$, dla której wartości funkcjonału

$$J(\vec{w}) = \frac{1}{2}\iint_D \left\{\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\gamma\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \vec{F}\cdot\vec{w}\right\} dxdy + \int_L \vec{f}\cdot\vec{w}\, dL, \tag{2.1}$$

przy zadanych funkcjach $\vec{F}$, $\vec{f}$ i stałych α, β, γ, δ - jest najmniejsza. Funkcje $\vec{F}$, $\vec{f}$ określają obciążenie płyty, na które składa się pole sił i pole wektorowe odpowiadające polu temperatur, tj.

$$\vec{F} = \vec{F}^1 + \operatorname{grad}T \cdot \varepsilon,$$
$$\vec{f} = \vec{f}^1 + T\vec{n} \cdot \varepsilon, \tag{2.2}$$

gdzie $\vec{F}^1$, $\vec{f}^1$ - pola sił, T - temperatura $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$ - macierz współczynników określających własności termiczne płyty, $\vec{n}$ wektor normalny do brzegu, zwrócony do wnętrza obszaru D. Stałe α, β, γ, δ są to stałe materiałowe, określające właściwości ośrodka.

3. Metoda rozwiązywania zadania sformułowanego w p. 2

Wiadomo, że minimalizacja funkcjonału prowadzi do rozwiązywania równań i odwrotnie; poszukiwanie rozwiązania danego układu równań jest równoważne minimalizacji odpowiedniego funkcjonału w odpowiednim zbiorze.

W związku z tym metoda wyznaczania argumentu $\vec{w}$ minimalizującego funkcjonał (2.1), którą zastosowano w pracy, polega na minimalizacji funkcjonału w podprzestrzeni $R^n \subset W_2^1$. Funkcjonał (2.1) w R^n po wykonaniu całkowania staje się szczególnym funkcjonałem, tzn. funkcją kwadratową n zmiennych.

Minimalizacja takiej funkcji kwadratowej wielu zmiennych prowadzi do rozwiązywania liniowego układu równań. Poza tym, jeżeli ciąg $\{R^n\}$ jest ciągiem o własności $R^n \subset R^{n+1}$ to ciąg $\{\vec{w}(n)\}$ funkcji $\vec{w}(n) \in R^n$ i minimalizujących funkcjonał (2.1) spełnia warunek $J(\vec{w}(n)) \geqslant J(\vec{w}(n+1))$.

Zgodnie z określeniem metody za dziedzinę funkcjonału (2.1) przyjęto następujący zbiór funkcji:

$$N_2^1 = \{f : f \in C,\ f \text{ - wielomian stopnia } \nu \text{ w podobszarach obszaru } D\}. \tag{3.1}$$

4. Warunki konieczne i dostateczne minimum funkcjonału (2.1)

Funkcjonał (2.1) jest sumą dwu funkcjonałów

$$J(\vec{w}) = W(\vec{w}) + l(\vec{w}), \tag{4.1}$$

gdzie

$$W(\vec{w}) = \frac{1}{2} \iint_D \left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dxdy$$
$$l(\vec{w}) = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{w}\, dxdy + \int_L \vec{f} \cdot \vec{w}\, dL. \tag{4.2}$$

Funkcjonał $(4.2)_1$ jest funkcjonałem kwadratowym, któremu odpowiada funkcjonał dwuliniowy postaci:

$$W(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2) = \frac{1}{2}\iint_D \Big[\alpha\frac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial y} + \gamma\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial y}\Big) +$$

$$+\delta\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\Big)\Big]\,dxdy. \tag{4.3}$$

Funkcjonał (4.3) posiada następującą własność

$$W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = W(\tilde{w}_2,\tilde{w}_1). \tag{4.4}$$

Jeżeli w (4.3) przyjmiemy $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = w$, to otrzymamy

$$W(\tilde{w},\tilde{w}) = W(\tilde{w}). \tag{4.5}$$

Funkcjonał (4.3), jako funkcjonał liniowy względem każdego argumentu, posiada następującą własność:

$$W(a\tilde{w}_1 + b\tilde{w}_2, \tilde{w}) = aW(\tilde{w}_1,\tilde{w}) + bW(\tilde{w}_2,w). \tag{4.6}$$

Wnioskiem z (4.5), (4.6) jest tożsamość

$$W(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) = W(\tilde{w}_1) + W(\tilde{w}_2) + 2W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2). \tag{4.7}$$

Z własności (4.6) wynika następująca równość:

$$W(\tilde{w}_2) - W(\tilde{w}_1) = W(\tilde{w}_2+\tilde{w}_1, \tilde{w}_2-\tilde{w}_1). \tag{4.8}$$

Tożsamości (4.8) można nadać postać

$$W(\tilde{w}_2) - W(\tilde{w}_1) = 2W(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2-\tilde{w}_1) + W(\tilde{w}_2-\tilde{w}_1). \tag{4.9}$$

Ponieważ funkcjonał $(4.2)_2$ jest funkcjonałem liniowym, więc przyrost funkcjonału ma postać:

$$l(\tilde{w}_2) - l(\tilde{w}_1) = l(\tilde{w}_2-\tilde{w}_1). \tag{4.10}$$

Z (4.9), (4.10) wynika, że wariacje funkcjonałów (4.2) określają następujące wzory:

$$\begin{aligned} \delta W &= 2W(\vec{w},\vec{\xi}), \\ \delta l &= l(\vec{\xi}), \\ \delta^2 W &= W(\vec{\xi}), \\ \delta^2 l &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Oznacza to, że

$$\Delta J(\vec{w}) = 2W(\vec{w},\vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) \tag{4.12}$$

oraz

$$\Delta J(\vec{w}) = \delta J(\vec{w}) + W(\vec{\xi}). \tag{4.13}$$

Z tożsamości (4.13) wynika następujące

T w i e r d z e n i e 4.1

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia minimum funkcjonału (2.1) jest tożsamość

$$\underset{\vec{\xi}\in B}{\forall} (\delta J(\vec{w}) = 2W(\vec{w},\vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) = 0), \tag{4.14}$$

gdzie

$$B = \left\{\vec{\xi}:\ (\vec{\xi}\in W_2^1)\wedge(\xi_i/_{L_i} = 0)\right\};\quad i=1,2,\ L_i\subset L,$$

Li - ten odcinek brzegu, na którym zadana jest i-ta współrzędna wektora $\vec{w}$.

Dowód:

Z teorii funkcjonałów wiadomo, że warunkiem koniecznym istnienia minimum funkcjonału (2.1) jest zerowanie się jego wariacji. Jeżeli $\delta J(\vec{w}) = 0$, to na podstawie (4.13).

$$\Delta J(\vec{w}) = W(\vec{\xi}). \tag{4.15}$$

Ponieważ funkcjonał $(4.2)_1$ jest dodatnio określony (zgodnie z p. 6),więc z (4.15) wynika

$$\underset{\vec{w}_1-\vec{w}\in B}{\forall} (J(\vec{w}_1) - J(\vec{w}) \geqslant 0). \tag{4.16}$$

Nierówność (4.16) jest def. minimum funkcjonału (2.1) w punkcie $\vec{w}$.

Jeżeli $\vec{w} \in B$ to za $\vec{\xi}$ w tożsamości (4.14) możemy wstawić $\vec{w}$. Po podstawieniu otrzymamy równanie

$$2W(\vec{w}) + l(\vec{w}) = 0. \tag{4.17}$$

Z (4.17) i (4.1) wynika, że

$$J(\vec{w}) = -W(\vec{w}). \tag{4.18}$$

Oznacza to, że prawdziwy jest następujący

L e m a t (4.1) Minimum funkcjonału (2.1) jest równe $-W(\vec{w})$, gdzie $\vec{w}$ spełnia warunek (4.14) i $w \in B$. Z (4.14) wynika również, że prawdziwe jest następujące

T w i e r d z e n i e 4.2.

Zadanie 2 może posiadać tylko jedno rozwiązanie.

Dowód:

Przypuśćmy, że istnieją dwa rozwiązania $\vec{w}_1 \neq \vec{w}_2$. Oznacza to, że zgodnie z (4.14) prawdziwe są następujące tożsamości

$$\begin{aligned} 2W(\vec{w}_1, \vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) &\equiv 0 \\ 2W(\vec{w}_2, \vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Po odjęciu tożsamości (4.19), otrzymamy

$$W(\vec{w}_2 - \vec{w}_1, \vec{\xi}) \equiv 0. \tag{4.20}$$

Jeżeli w (4.20) za $\vec{\xi}$ wstawimy $\vec{w}_1 - \vec{w}_2$ to powstanie równanie

$$W(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) = 0. \tag{4.21}$$

Ponieważ funkcjonał $(4.2)_1$ jest dodatnio określony (p.6), więc $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$. W ten sposób wykazano, że warunek (4.14) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia minimum funkcjonału (2.1) oraz, że z istnienia rozwiązań zadania 2 wynika jednoznaczność.

Tożsamość (4.14) jest równoważna układowi równań cząstkowych. W związku z tym prawdziwe jest następujące

T w i e r d z e n i e 4.3

Jeżeli $\vec{w}$ spełnia warunek (4.14), to $\vec{w}$ spełnia następujący układ równań i odwrotnie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} &= F_1 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} &= F_2 \end{aligned}\right\} : (x,y) \in D; \tag{4.22}$$

$$\tau_{11} \cos\alpha + \tau_{21} \sin\alpha = f_1 : (x,y) \in L_1,$$

$$\tau_{12} \cos\alpha + \tau_{22} \sin\alpha = f_2 : (x,y) \in L_2$$

lub

$$\begin{aligned} &\tau_{11} \cos^2\alpha + 2\tau_{21} \sin\alpha\cos\alpha + \tau_{22}\sin^2\alpha = f_1\cos\alpha + f_2\sin\alpha, \\ &\tau_{11} \cos\alpha\sin\alpha - \tau(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \tau_{22}\sin\alpha\cos\alpha = f_1\sin\alpha - f_2\cos\alpha, \end{aligned} \tag{4.23}$$

gdzie:

$$\tau_{11} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{21} = \tau_{12} = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{22} = \beta\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial x},$$

α - kąt między osią x i wektorem normalnym do brzegu L.

Rozważania podane w niniejszym artykule dotyczą takich zadań brzegowych, których warunki brzegowe można sformułować za pomocą następujących równań

$$\begin{aligned} &u = 0, \quad v = 0, \quad u\cos\alpha + \gamma\sin\alpha = w_n = 0, \\ &u\sin\alpha - v\cos\alpha = w_s = 0, \ (4.22)_{3,4}, \ (4.23). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Oznacza to, że na danym odcinku brzegu L warunek brzegowy zadania jest sformułowany za pomocą jednej z następujących par równań

$$\begin{aligned} &u = 0, \ v = 0; \quad u = 0, \ (4.22)_4; \ v = 0, \ (4.22)_3; \\ &w_n = 0, \ (4.23)_1; \ w_s = 0, \ (4.23)_2; \ (4.22)_3, \ (4.22)_4. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Dowód:

Niech $\vec{w} \in W_2^2$. Jeżeli lewą stronę tożsamości (4.14) przekształcimy, posługując się odpowiednio wzorem na pochodną iloczynu, to otrzymamy

$$\delta J = -\iint_D \left[\left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y}\right)\xi_1 + \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y}\right)\xi_2\right] dxdy + \tag{4.26}$$

$$+ \iint_D \vec{F} \cdot \vec{\xi}\, dxdy - \int_L \left\{\left[\tau_{11}\cos\alpha + \tau_{21}\sin\alpha\right]\xi_1 + \right.$$

$$\left. + \left[\tau_{12}\cos\alpha + \tau_{22}\sin\alpha\right]\xi_2 \right\} dL + \int_L \vec{f}\vec{\xi}\, dL$$

lub

$$\delta J = -\left[\left\langle \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} - F_1, \xi_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} - F_2, \right.\right.$$

$$\left.\left. \xi_2 \right\rangle\right] - \int_L \left\{\left[\tau_{11}\cos\alpha + \tau_{21}\sin\alpha - f_1\right]\xi_1 + \right. \tag{4.27}$$

$$\left. + \left[\tau_{12}\cos\alpha + \tau_{22}\sin\alpha - f_2\right]\xi_2 \right\} dL.$$

Postać (4.27) wariacji δJ jest uogólnieniem (4.26) na przestrzeń np. W_2^1. Drugie pochodne występujące w (4.27) rozumiane są jako dystrybucje, zdefiniowane tożsamością

$$\forall_{\xi \in B} \left(\iint_D \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_m} dx_1 dx_2 = \pm \int_4 \frac{\partial u}{\partial x_k} \xi dx_p - \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m}, \xi \right\rangle\right), \tag{4.28}$$

$p \neq m$, znak + odpowiada $p = 2$, $\langle f, \varrho \rangle$ - symbol dystrybucji por. (4). Z określenia równości dystrybucji (4) oraz równości (4.27) i (4.14) wynika układ równań (4.22).

Każdemu warunkowi brzegowemu (4.25) odpowiada pewien funkcjonał $l(\vec{w})$. W związku z tym, postępując jak wyżej, otrzymamy odpowiedni układ równań (4.22). Prawdziwość twierdzenia odwrotnego do tw. 4.3 wynika z równoważności (4.27) i (4.12).

5. Rodzaje zadania p. 2

W zadaniu p. 2 możemy wyróżnić dwa podstawowe przypadki:

a) liczba 0 nie jest wartością własną operatora zadania 2;

b) liczba 0 jest wartością własną operatora zadania 2.

Z przypadkiem b) mamy do czynienia wtedy gdy na brzegu L zadany jest tensor naprężenia, lub gdy obszar D jest kołem i na brzegu zadane są warunki $(4.25)_4$.

Takie dane zadania 2 nie zapewniają istnienia rozwiązania, a jeżeli istnieje rozwiązanie, to istnieje ich więcej, różniących się o funkcję liniową.

Zadanie 2a) posiada jedno rozwiązanie. Rozwiązanie zadania 2b istnieje, jeżeli funkcje $\vec{F}$, $\vec{f}$ jako dane zadania 2 są ortogonalne do funkcji własnych zadania, tzn. jeżeli są spełnione następujące warunki:

$$\iint_D \vec{F}\, dxdy + \int_L \vec{f}\, dL = \vec{0},$$
$$\iint_D \vec{r} \times \vec{F}\, dxdy + \int_L \vec{r} \times \vec{f}\, dL = \vec{0}. \tag{5.1}$$

Funkcje $\vec{F}$, $\vec{f}$ zadania 2b spełniają równanie (5.1), a to dlatego, że (5.1) są warunkami równowagi dla $\vec{F}^1$, $\vec{f}^1$, zaś $\vec{F}-\vec{F}^1$, $\vec{f}-\vec{f}^1$ (jak łatwo sprawdzić) dla każdego T czynią zadość warunkom (5.1).

Ponieważ warunek (5.1) jest warunkiem rozwiązalności zadania 2b), więc każda zmiana $\vec{F}^1$, $\vec{f}^1$ w procesie rozwiązywania zadania powinna spełniać warunek (5.1). Dotrzymanie warunku (5.1) różni zadania 2b) od 2a. Poza tym istnieje jeszcze jeden szczegół różniący obydwa zadania: Warunek (5.1) zapewnia tylko istnienie rozwiązania zadania 2b. Dla uzyskania jednoznaczności rozwiązania należy przyjąć dodatkowe warunki np. zgodnie z [2]

$$\iint_D \vec{w}\, dxdy = \vec{0}$$
$$\iint_D \vec{r} \times \vec{w}\, dxdy = \vec{0}. \tag{5.2}$$

6. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania 2

Z postaci funkcjonału $(4.2)_1$ wynika prawdziwość następującej nierówności

$$W(\vec{w}) \geqslant M \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right] dxdy. \tag{6.1}$$

Ponieważ funkcje $\vec{w}$ spełniające warunki (4.25) oraz (5.2) nie mogą się różnić o stały wektor $\vec{c}$ więc zgodnie z [3] przyjęto następującą normę

$$\|\vec{w}\|_{W_2^1} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy. \tag{6.2}$$

Poza tym w zbiorze

$$Q = \left\{ \vec{w}: \quad \vec{w} \in W_2^1, \quad \vec{w} \text{ - spełnią jeden z warunków } (4.25) \right\} \tag{6.3}$$

prawdziwe są (por. (2)) nierówności:

$$\|\vec{w}\|_{L_2} \leqslant M\|\vec{w}\|_{W_2^1}$$

$$\|\vec{w}\|_{W_2^1} \leqslant M\iint_{\bar{D}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dxdy. \tag{6.4}$$

Z nierówności (6.1) oraz (6.4) wynika następujące

T w i e r d z e n i e 6.1

$$\underset{M>0}{\exists} \quad \underset{\vec{w}\in Q}{\forall} \left(W(\vec{w}) \geqslant M \ \|\vec{w}\|_{W_2^1}(1)\right). \tag{6.5}$$

Dowód istnienia rozwiązania będzie polegał na konstrukcji ciągu $\{\vec{w}(n)\}$ zbieżnego w W_2^1. W związku z tym obieramy skończony zbiór $\bar{D}_h$ punktów $\bar{D}$. Punkty zbioru $\bar{D}_h$ będą wierzchołkami trójkątnych podobszarów obszaru $\bar{D}$.

Należy dodać, że podobszar, którego dwa wierzchołki znajdują się na brzegu L nie musi być trójkątem. Zbiór D_h obieramy na razie dowolnie. Po przyjęciu zbioru $\bar{D}_h$, tworzymy ciąg zbiorów $\bar{D}_h(n)$ gdzie:

$$\bar{D}_h(n) = \bar{D}_{\frac{h}{2^n}} \tag{6.6}$$

$h = \max_i [bi]$, bi - i - ty bok podobszarów.
Określenie (6.6) oznacza jedynie to, że na każdym z boków figury odpowiadającej zbiorowi $\bar{D}_h(n)$ został obrany punkt, a tym samym powstał zbiór $D_h(n+1)$.
Ponieważ każdemu zbiorowi $\bar{D}_h(n)$ odpowiada zbiór funkcji N_2^1, więc zbiór N_2^1 odpowiadający $\bar{D}_h(n)$ oznaczono symbolem $N_2^1(n)$; $n = 0,1,2...$, $N_2^1(0) = N_2^1$, $\bar{D}_h(0) = \bar{D}_h$.

Funkcjonał (4.1) w zbiorze $N_2^1(n)$ jest funkcją kwadratową wielu zmiennych. Argumentami tej funkcji są wartości elementu $\vec{w} \in N_2^1(n)$ w punktach zbioru $\bar{D}_h(n)$, gdy $r = 1$.

Po wprowadzeniu następującego oznaczenia

$$J(\vec{w} \in N_2^1(n)) = G(\{\vec{w}_i\}); \ i=1(1)m, \tag{6.7}$$

gdzie: m - liczba punktów zbioru $D_h(n)$,

otrzymamy następujący warunek konieczny i dostateczny istnienia minimum funkcjonału (4.1) w zbiorze $N_2^1(n)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ G(\{\vec{w}_i\}) = \vec{0}. \tag{6.8}$$

Układ równań (6.8) jest układem liniowym określającym element $\vec{w} \in N_2^1(n)$ minimalizujący funkcjonał (4.1) w $N_2^1(n)$. Warunek (6.5) zapewnia rozwiązalność i jednoznaczność układu (5.8) w przypadku a), natomiast w przypadku b) układ (6.8) posiada jedno rozwiązanie, jeżeli spełnione są warunki (5.1), (5.2).

Różniczka zupełna funkcji $G(\{\vec{w}_i\})$ jest równocześnie wariacją funkcjonału (4.1) w zbiorze $N_2^1(n)$. W związku z tym $\vec{w}$ określone za pomocą równania (6.9) spełnia równanie (4.17), tzn.

$$\forall_{h>0} \; \forall_{n \in N} \; (2W(\vec{w}(n)) + l(w(n)) = 0). \tag{6.9}$$

Po wstawieniu (6.4), (6.10)

$$\forall_{\varepsilon>0} \; (|ab| \leqslant (\frac{1}{4\varepsilon} \|a\|^2 + \varepsilon \|b\|^2) \tag{6.10}$$

oraz nierówności

$$\exists_{M>0} \; (\|\varphi\|'_{L_2} \leqslant M \|\varphi\|_{W_2^1}), \tag{6.11}$$

por. [3], gdzie $\|\cdot\|'_{L_2}$ - norma na brzegu L

do (6.9) i (4.17) otrzymamy następujące

T w i e r d z e n i e 6.2

$$\exists_{M>0} \; (\|\vec{w}\|^2_{W_2^1} \leqslant M(\|\vec{F}\|^2_{L_2} + \|\vec{f}\|'^2)).$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że skoro istnieje rozwiązanie $\vec{w}$ zadania 2, to rozwiązanie to należy do przestrzeni W_2^1.

Ponieważ układ (6.8) jest układem oznaczonym, więc ciąg $\{\vec{w}(n)\}$ jest ciągiem minimalizującym funkcjonał (4.1), przy czym $\vec{w}(n) \in N_2^1(n)$ i $\vec{w}(n)$ minimalizuje funkcjonał (4.1). W związku z powyższym prawdziwe jest następujące

T w i e r d z e n i e 6.3

Ciąg $\{\vec{w}(n)\}$ jest ciągiem zbieżnym w W_2^1.

Dowód:

Zgodnie z określeniem ciągu $\{N_2^1(n)\}$ prawdziwe jest zdanie

$$\forall_{n \in N} \; (N_2^1(n) \subset N_2^1(n+1)). \tag{6.13}$$

Z (6.13) wynika, że

$$\forall_{n\in N} (J(\vec{w}(n)) \geqslant J(\vec{w}(n+1))). \tag{6.14}$$

Oznacza to, że ciąg $\{J(\vec{w}(n))\}$ jest ciągiem malejącym. Z twierdzenia (6.2) wynika, iż całka kwadratu każdej pochodnej $\vec{w}(n)$ jest ograniczona. Ponieważ (zgodnie z (4.18).

$$J(\vec{w}(n)) = - W(\vec{w}(n)), \tag{6.15}$$

więc ciąg $\{J(\vec{w}(n))\}$ jest ciągiem ograniczonym, a tym samym zbieżnym. Jeżeli za $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ wstawimy do (4.7) $\vec{w}(k) - \vec{w}(m)$ to otrzymamy:

$$W(\vec{w}(k)-\vec{w}(m)) = W(\vec{w}(k)) + W(\vec{w}(m) - 2W(\vec{w}(k),\vec{w}(m)). \tag{6.16}$$

Ponieważ z $k<m$ wynika $w(k) \in N_2^1(m)$, więc po podstawieniu do (4.14) $\vec{w}(m)$ za $\vec{w}$ oraz $\vec{w}(k)$ za $\vec{\xi}$ otrzymamy:

$$2W(\vec{w}(m), \vec{w}(k)) + l(\vec{w}(k)) = 0. \tag{6.17}$$

Jeżeli zaś $\vec{w}(k)$ wstawimy do (4.17) za $\vec{w}$, to powstanie równanie

$$2W(\vec{w}(k)) + l(\vec{w}(k)) = 0. \tag{6.18}$$

Po wstawieniu (6.17) i (6.18) do (6.16) otrzymamy

$$W(\vec{w}(k) - \vec{w}(m)) = W(\vec{w}(m)) - W(\vec{w}(k)). \tag{6.19}$$

Ponieważ ciąg $\{J(w(n))\}$ jest ciągiem malejącym, więc zgodnie z(6.15) ciąg $\{W(\vec{w}(n))\}$ jest ciągiem rosnącym i zbieżnym, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} W(\vec{w}(n)) = W_0. \tag{6.20}$$

Jeżeli wstawimy (6.5) (6.20) do (6.19), to otrzymamy

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0\in N} \left[(k,m>n_0) \Rightarrow (\|\vec{w}(k)\| - \vec{w}(m)\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{M})\right]. \tag{6.21}$$

Ponieważ przestrzeń W_2^1 jest zupełna, więc z (6.21) wynika, że ciąg $\{\vec{w}(n)\}$ jest ciągiem zbieżnym w W_2^1. Ciągłość funkcjonału (4.1) wynika z lematu 6.1.

L e m a t 6.1

$$\exists_{M>0} \left(|W(\bar{w}_1, \bar{w}_2)| \leq M\|\bar{w}_1\|\,\|\bar{w}_2\|\right). \tag{6.22}$$

Dowód:

Z określenia iloczynu skalarnego w L_2 mamy

$$\left|\iint_D \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx_1 dx_2\right| \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{L_2}; \quad i,j=1,2. \tag{6.23}$$

Następnie z def. norm w L_2 i W_2^1 wynika nierówność

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2} \leq \|u\|_{W_2^1}. \tag{2.24}$$

Ponieważ $W(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ jest sumą całek występujących po lewej stronie nierówności (6.23), więc korzystając z nierówności $|a+b| \leq |a|+|b|$, (6.23), (6.24) otrzymamy (6.22).

Z lematu 6.1 wynika następujące

T w i e r d z e n i e 6.4

$$\lim_{n\to\infty} J(\bar{w}(n)) = J(\bar{w}). \tag{2.25}$$

Dowód:

Po wstawieniu (4.18) (6.15) do (4.9) i wykorzystaniu (6.22), otrzymamy

$$|J(\bar{w}(n)) - J(\bar{w})| \leq M\|\bar{w}(n)-\bar{w}\|\,\|\bar{w}(n) + \bar{w}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{6.26}$$

a to jest (6.25).

7. Rząd zbieżności ciągu

W p. 6 wykazano zbieżność ciągu $\{\bar{w}(n)\}$ do $\bar{w} \in W_2^1$. Nie wiadomo jednak jak szybko wyrazy ciągu $\{\bar{w}(n)\}$ zbiegają do granicy. Miarą tej prędkości jest tzw. rząd zbieżności ciągu. Ponieważ ze zbieżności ciągu $\{\bar{w}(n)\}$ wynika, że granica $\bar{w} \in W_2^1$, więc informacja: $\bar{w} \in W_2^1$ nie może określać rzędu zbieżności ciągu $\{w(n)\}$. Podwyższanie rzędu zbieżności może mieć duże znaczenie przy numerycznym wyznaczaniu możliwie dobrego przybliżenia rozwiązania zadania 2.

Jak się później okaże, rząd zbieżności zależy w istocie od rzędu aproksymacji $Z \subset W_2^1$, do którego należy rozwiązanie zadania 2 zbiorem $N_2^1(n)$.

Niech $\vec{w}$, $\vec{w}(n)$ będą funkcjami minimalizującymi funkcjonał (4.1) odpowiednio w W_2^1 i R^n (Przykładem przestrzeni R^n mogą być zbiory $N_2^1(k)$). Jako funkcje minimalizujące spełniają następujące tożsamości:

$$\forall_{\vec{\xi} \in B} (2W(\vec{w}, \vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) = 0,$$

$$\forall_{\vec{\xi} \in B(n)} (2W(\vec{w}(n), \vec{\xi}) + l(\vec{\xi}) = 0. \tag{7.1}$$

Ponieważ $B(n) \subset B$, więc odejmując tożsamości (7.1), dla $\vec{\xi} \in B(n)$ otrzymamy

$$\forall_{\vec{\xi} \in B(n)} (W(\vec{w}-\vec{w}(n), \vec{\xi}) = 0). \tag{7.2}$$

Przez $\hat{\vec{w}}(n)$ oznaczono funkcję należącą do R^n $(R^n \subset R^{n+1})$ i będącą aproksymacją $w \in Z \subset W_2^1$, tzn. dane jest odwzorowanie $\Phi: R^n \to Z$. Wtedy

$$\Delta\vec{w} = \vec{w} - \hat{\vec{w}}(n). \tag{7.3}$$

Po wstawieniu (7.3) do (7.2) otrzymamy:

$$\forall_{\vec{\xi} \in B(n)} (W(\hat{\vec{w}}(n) - \vec{w}(n), \vec{\xi}) + W(\Delta\vec{w}, \vec{\xi}) = 0), \tag{7.4}$$

gdzie $\vec{w}(n) \in R^n$ i minimalizuje funkcjonał (4.1) w R^n. Ponieważ $\hat{\vec{w}}(n) - \vec{w}(n) \subset B(n)$, więc za $\vec{\xi}$ w (7.4) możemy wstawić $\hat{\vec{w}}(n) - \vec{w}(n)$. Po podstawieniu otrzymamy

$$W(\hat{\vec{w}}(n) - \vec{w}(n)) + W(\Delta\vec{w}, \hat{\vec{w}}(n) - \vec{w}(n)) = 0. \tag{7.5}$$

Z równania (7.5) wynika, że prawdziwe jest następujące

T w i e r d z e n i e 7.1

$$(\|\Delta\vec{w}\| = O((\tfrac{1}{n})^r)) \Longrightarrow (\|\vec{w}-\vec{w}(n)\| = O((\tfrac{1}{n})^r. \tag{7.6}$$

Dowód:

Zgodnie z aksjomatem normy możemy napisać

$$\|\vec{w} - \vec{w}(n)\| = \|\Delta\vec{w} + \hat{\vec{w}} - \vec{w}(n)\| \leq \|\Delta\vec{w}\| + \|\hat{\vec{w}}(n) - \vec{w}(n)\|. \tag{7.6$_1$}$$

Po wstawieniu (6.22), (6.10), (6.5) do (7.5) otrzymamy

$$\|\hat{\vec{w}}(n) - \vec{w}(n)\| = O((\tfrac{1}{n})^r). \tag{7.7}$$

Jeżeli następnie (7.7) oraz założenie twierdzenia 7.1 wstawimy do (7.6), to otrzymamy tezę tw. 7.1. Z twierdzenia 7.1 wynikają następujące wnioski

Wniosek 7.1 Jeżeli $Z = C^r$, $R^n = N_2^1$, $\vec{w} \in C^{r+1}$, to

$$\|\vec{w} - \vec{w}(o)\| = O(h^r). \tag{7.8}$$

Dowód:
Z określenia N_2^1 wynika, że $\vec{w} - \vec{w}(o) = \vec{0}$ w r+1 punktach każdego boku dowolnego podobszaru. Ponieważ jednym z założeń jest: $\vec{w} \in C^{r+1}$, więc

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{w} - \vec{w}(o))\right| = O(h^r); \quad i=1,2. \tag{7.9}$$

Warunek (7.9) wystarcza na to, by:

$$\|\vec{w} - \vec{w}(n)\| = O(h^r), \tag{7.10}$$

a tym samym prawdą jest (7.8), tzn.

$$\|\vec{w} - \vec{w}(n)\| = O(h^r). \tag{7.11}$$

Wniosek 7.2. Zadania typu 2 są zadaniami z teorii aproksymacji zbioru Z, do którego należy rozwiązanie zadania, przestrzenią R^n.
Oznacza to, że przybliżone rozwiązanie zadania 2 należące do R^n jest tym "lepsze" (w sensie rzędu zbieżności) im dokładniejsza jest aproksymacja określona operatorem $\emptyset_n$.

8. Ciągłość rozwiązania zadania 2 względem danych zadania

Aby rozwiązać układ (6.8) należy najpierw wyznaczyć wyrazy wolne tego układu; są one całkami danych funkcji po elementarnych trójkątach i brzegach należących do trójkątów zewnętrznych i brzegu L.
Kolumna wyrazów wolnych układu (6.8) jako całki danych funkcji może być wyznaczona w sposób przybliżony obraną metodą wyznaczania całek.
W związku z tym powstaje pytanie: jaki wpływ może mieć przybliżone wyznaczenie wyrazów wolnych układu (6.8) na różnice $\vec{w} - \vec{w}(o)$. Odpowiedź na to pytanie daje

T w i e r d z e n i e 8.1

$$\underset{M>0}{\exists}\left(\|\vec{w}_2-\vec{w}_1\|^2_{W_2^1} < M\left(\|\vec{\Delta F}\|^2_{L_2} + \|\vec{\Delta f}\|'^2_{L_2}\right)\right), \tag{8.1}$$

gdzie: $\vec{\Delta F} = \vec{F}_2-\vec{F}_1$, $\vec{\Delta f} = \vec{f}_2-\vec{f}_1$, $\vec{w}_i$ - rozwiązanie zadania 2 odpowiadające funkcjonałowi $l_i(\vec{w})$ postaci $(4.2)_2$, określonemu za pomocą $\vec{F}_i$, $\vec{f}_i$; $i=1,2$.

Dowód:

Rozwiązania $\vec{w}_i$ odpowiadające funkcjonałom l_i zgodnie z (4.14) spełniają następujące tożsamości

$$\underset{\vec{\xi}\in B}{\forall}\ (2\,W(\vec{w}_i,\vec{\xi}) + l_i(\vec{\xi}) = 0);\quad i=1,2. \tag{8.2}$$

Odejmując tożsamości (8.2) otrzymamy

$$\underset{\vec{\xi}\in B}{\forall}\ (2\,W(\vec{w}_2-\vec{w}_1,\vec{\xi}) + \Delta l(\vec{\xi}) = 0). \tag{8.3}$$

Po podstawieniu $\vec{w}_2-\vec{w}_1$ za $\vec{\xi}$ w (8.3) powstanie równanie

$$2W(\vec{w}_2-\vec{w}_1) + \Delta l(\vec{w}_2-\vec{w}_1) = 0. \tag{8.4}$$

Nierówność (6.12) odpowiadająca równaniu (8.4) jest twierdzeniem 8.1.
Z twierdzenia 8.1 wynika następujący wniosek

$$(\|\vec{w}_2-\vec{w}_1\| = O(h^r))\wedge(\|\vec{w}_2-\vec{w}_2(o)\| = O(h^r)) \Longrightarrow (\|\vec{w}_2(o)-\vec{w}_1\| = O(h^r)). \tag{8.5}$$

Dowód:

$$\|\vec{w}_2(o)-\vec{w}_1\| \leq \|\vec{w}_2(o)-\vec{w}_2\| + \|\vec{w}_2-\vec{w}_1\| = O(h^r). \tag{8.6}$$

Z twierdzenia 8.1 wynika również następująca uwaga dla rozwiązującego układ (6.8): wyrazy wolne tego układu mogą być "zaburzone" błędem takiego rzędu jakiego przybliżeniem jest rozwiązanie $\vec{w}(o)$ określone układem (6.8).

9. Układ (6.8) odpowiadający zbiorowi funkcji obszarami liniowych

Niech obszar D będzie prostokątem o wymiarach (a,b), zbiór $\bar{D}_h$ - zbiorem wierzchołków prostokątów o bokach

$$h = (h_1, h_2) = \left(\frac{a}{N_1}, \frac{b}{N_2}\right) \text{ i } \Delta^+_{ij}, \ \Delta^-_{ij}; \quad i=0(1)N_1-1, \ j=0(1)N_2-1$$

oznaczeniami dwóch trójkątnych podobszarów takich, by

$$\forall_{ij} \left(\Delta^+_{ij} + \Delta^-_{i+1\ j+1} = \text{prostokąt}\right). \tag{9.1}$$

Poza tym przyjmujemy następujące oznaczenia:

L^+_i, L^+_j - boki prostopadłe trójkąta Δ^+_{ij};

L^-_i L^-_j - boki prostopadłe trójkąta Δ^-_{ij};

$u^+_x(ij)$ - pochodna funkcji $u \in N^1_2$, stała w Δ^+_{ij} i równa ilorazowi różnicowemu funkcji u, liniowej w Δ^+_{ij}

$t^+_{pk}(ij)$ - tensor naprężenia odpowiadający $\vec{w} \in N^1_2$ stały w Δ^+_{ij};

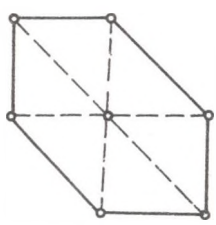
$t^+_{pkx} = \frac{1}{h_1}(t^+_{pk}(ij) - t^+_{pk}(i-1,j))$;

$t^-_{pkx} = \frac{1}{h_1}(t_{pk}(i+1,j) - t_{pk}(i,j))$.

Jeżeli określimy funkcje $\vec{F}$, t_{pk}, $\vec{f}$ poza dziedziną każdej z nich jako równe zero, to układ równań (6.8) przyjmie postać

$$\left.\begin{aligned} t^+_{11x} + t^-_{11x} + t^+_{21y} + t^-_{21y} &= 2F^*_1 \\ t^+_{12x} + t^-_{12x} + t^+_{22y} + t^-_{22y} &= 2F^*_2 \end{aligned}\right\}; \quad \begin{aligned} i &= 0(1)N_1-1 \\ j &= 0(1)N_2-1. \end{aligned} \tag{9.2}$$

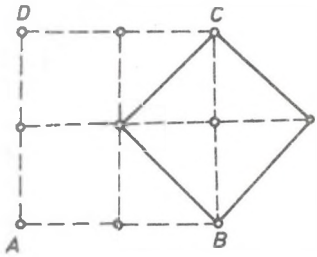
Ponieważ niewiadome każdego równania układu (9.2) są wartościami szukanej funkcji w punktach zbioru $\bar{D}_h$, więc każdemu równaniu odpowiada pewna figura dziedziny $\bar{D}$, której wierzchołkami i środkiem są punkty odpowiadające niewiadomym danego równania. Każde równanie układu (9.2), ze względu na jego sposób generowania, por. (6.8), odpowiada niewiadomej środka. Figurą odpowiadającą równaniu (9.2) jest sześciobok rys. 1.



Rys. 1

W przypadku zadań brzegowych o zadanych wartościach funkcji u lub ϑ należy z układu (9.2) odrzucić te równania, które odpowiadają punktom o danych wartościach u lub ϑ i wstawić dane wartości u, ϑ do otrzymanego układu.

Przez zmianę zbioru $\bar{D}_h$ oraz układu elementarnych trójkątów możemy zmieniać układ (6.8), a tym samym zmieniać poprawność obliczeniową układu.



Rys. 2

Jeżeli przykładowo układ trójkątów przyjmiemy jak na rys. 2, to podstawową figurą dla połowy równań układu (6.8) będzie prostokąt o zarysie ciągłym, zaś dla drugiej połowy - prostokąt ABCD. Równania odpowiadające pierwszej figurze jako równania różnicowe odpowiadają równaniu różniczkowemu bez pochodnych mieszanych. W każdym z takich równań może wystąpić co najmniej 5 niewiadomych, w przeciwieństwie do drugiej grupy równań, w których występuje co najwyżej 9 niewiadomych.

W układzie (9.2) występują wielkości F_i^*, których definicje są następujące:

$$2F_L^* = \frac{1}{h_1h_2}\Big[\iint_{+\Delta ij} F_l(1-(x-x_i+y-y_i))dxdy + \iint_{-\Delta ij} F_l(1+(x-x_i+y-y_j))dxdy +$$

$$+\iint_{+\Delta i-1,j}(x-x_{i-1})F_l dxdy + \iint_{+\Delta ij-1}(y-y_{j-1})F_l dxdy - \iint_{-\Delta ij+1}(y-y_{j+1})F_l dxdy -$$

$$+\iint_{-\Delta i+1j}(x-x_{i+1})F_l\, dxdy\Big] + \frac{2}{h_1}\Big[\int_{L_j^+} f_l(1-(y-y_j))dy +$$

$$+\int_{L_j^-}(1+y-y_j)f_l\Big] + \frac{2}{h_2}\int_{L_i^+}(1-(x-x_i))f_l dx + \int_{L_i^-}(1+x-x_i)f_l dx\Big],$$

gdzie $l=1,2$.

Na zakończenie należy dodać, że każde z równań układu (6.8) jest bilansem sił zewnętrznych $\vec{F}$, $\vec{f}$ odpowiadających danej figurze rys. 1 oraz niewiadomych tzw. sił wewnętrznych odpowiadających brzegowi figury, a wyrażonych przez $\vec{w} \in N_2^1$ o dziedzinie będącej tą figurą.

LITERATURA

[1] Biełuchina I.G.: Raznostnyje schemy dla reszenija niekotorych staticzeskich zadacz teorii uprvgosti, Z.Wycz.Mat. i Mat.Fiz., 4,8/1968, 808-823.

[2] Michlin S.G.: Problema minimuma kwadraticznogo funkcjonała, Moskwa-Leningrad 1952.

[3] Sobolew S.L.: Einige anwendungen der Funktion-analysis auf Gleicungen der matchematischen Physik, Akademia-Verlag, Berlin 1964.

[4] Zemanian A.H.: Teorie dystrybucji i analiza transformat, PWN Warszawa 1969.

[5] Marszał J.: a) Numeryczne rozwiązanie zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych płyt izotropowych, ZN Pol.Sl., Mat.-Fiz., 25, 1974, 189-193; b) Numeryczne rozwiązanie zadań brzegowych teorii naprężeń cieplnych płyt izotropowych, Zast.Mat., w druku.

[6] Borkowski S.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok. Sympozjum "Konstrukcje powłokowe", Kraków 1974, s. 35.

НУМЕРИЧЕСКОЕ РЕШАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛОСКИХ ОРТОТРОПНЫХ ЩИТОВ

Р е з ю м е

В настоящей статье даётся нумерический метод определяния функции (в подобластях линейной) минимализирующей функционал, отвечающий краевой задаче ортотропных щитов; ряд сходностей приближённого решения (в норме пространства W_2^1/: $\|\Delta\|_{W_2^1} = O(|h|)$).

THE NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE THEORY OF THERMAL STRESSES OF ORTHOTROPIC DISKS

S u m m a r y

This paper deals with a numerical method of determining the function (linear in subspaces) which minimalizes the functional corresponding to the boundary value problem in the theory of thermal stresses of orthotropic disks. The agreement with the approximational solution (in the accepted space $W_2^{(1)}$) is given by $\|\Delta\|_{W_2^{(1)}} = O(|h|)$.