

Krzysztof Nazur

MODELE NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA PROBLEMU STYGNIEŃCIA
ODLEWÓW KRZEPNĄCYCH W PRZEDZIALE TEMPERATUR

Streszczenie: W pracy przedstawiono matematyczny opis procesu stygnięcia stopu krzepnącego w przedziale temperatur ΔU oraz zaproponowano algorytm rozwiązania numerycznego na bazie jawnych schematów różnicowych. Pracę wykonano w ramach seminarium i metod analogowych i cyfrowych prowadzonego w Instytucie Mechaniki Teoretycznej.

1. Wstęp

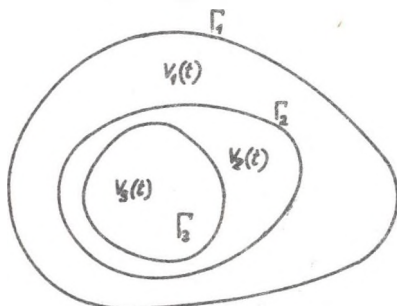
Znane z literatury modele numeryczne procesów zachodzących przy krzepnięciu odlewów traktują najczęściej metal jako składnik czysty dla którego przemiana fazowa następuje w temperaturze U_0 przy czym ciepło przemiany wynosi q , m.in. [1, 2, 3]. W przypadku u.p. stopów Fe - C takie przybliżenie jest dość grube i w związku z tym postawiono sobie za cel stworzenie metody numerycznej rozwiązania problemu przy uwzględnieniu krzepnięcia roztworu w przedziale temperatur. Publikowane dotychczas rozwiązania tego typu uzyskiwano bądź przy pomocy metody bilansów [4], bądź jak np. w pracach [5, 6] operując w schematach różnicowych bezpośrednio entalpię fizyczną roztworu. Metoda bilansów aczkolwiek skuteczna i prosta nie daje możliwości oszacowania błędu metody numerycznej, zaś metody omówione w [5, 6] nie pozwalają uwzględnić zmienności zarówno ΔU_0 jak $q(U_0)$ w zależności od lokalnego składu stopu.

Przedstawiony niżej model matematyczny i schemat numerycznego rozwiązania umożliwia oszacowanie błędu aproksymacji i uwzględnia złożoności procesu krzepnięcia stopu Fe - C.

2. Opis matematyczny procesu

Rozpatrzmy metal, którego stan stały odpowiada temperaturom mniejszym od T_2 , zaś stan ciekły temperaturom większym od T_3 przy czym $T_3 > T_2$. Niech metal zajmuje obszar V , który ograniczony jest brzegiem Γ_1 odpowiadającym zewnętrznej powierzchni formy. W chwili t w obszarze V można wyróżnić trzy podobszary: podobszar $V_1(t)$ stanu ciekłego, $V_2(t)$ stanu przejściowego i $V_3(t)$ stanu ciekłego. W obszarze przejściowym temperatu-

ra metalu należy do przedziału $[T_2, T_3]$. Podobszary rozdzielone są brzeżami $\Gamma_2(t)$, $\Gamma_3(t)$.



Rys. 1

Temperatury w poszczególnych podobszarach oznaczono symbolami $u_1(X, t)$, $u_2(X, t)$, $u_3(X, t)$, gdzie $X=(x_1, x_2, x_3)$ i x należy odpowiednio do obszarów określoności poszczególnych funkcji. Parametry termofizyczne charakteryzujące właściwości metalu w poszczególnych stanach oznaczono:

C - właściwa pojemność cieplna

γ - gęstość masy

λ - współczynnik przemiany ciepła

q - ciepło przemiany fazowej.

Wymienione parametry w stanach ciekłym i stałym przyjmujemy jako stałe, zaś w stanie przejściowym są funkcjami temperatury. Założmy również, iż przepływ ciepła w podobszarach zachodzi jedynie na drodze przewodzenia. Do dalszych rozważań wprowadzamy dodatkowo funkcję $p(u)$, gdzie $p(u)$ jest udziałem objętościowym metalu zakrzepłego w podobszarach $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$. Pola temperatur $u_i(X, t)$; $i = 1, 2, 3$ opisane są równaniami:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \text{div} (\lambda_i \text{grad } u_i) + \gamma_2 q \frac{\partial p(u_i)}{\partial t}, \quad (1)$$

gdzie $p(u)$ definiujemy jako:

$$p(u) = \begin{cases} 0 & u(t) > T_3 \\ 1 & u(t) < T_2 \end{cases}. \quad (2)$$

Dla zakresu temperatur krystalizacji przyjmujemy hipotezę:

$$p(u) = \frac{T_3 - u(t)}{T_3 - T_2}. \quad (3)$$

Przy przyjętych założeniach równania przewodnictwa w poszczególnych podobszarach przyjmą postać:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{a_i} \nabla^2 u_i \quad i = 1, 3 \quad (4)$$

$$C_2 \vartheta_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_2 \operatorname{grad} u_2) - \vartheta_2 q \frac{\partial u_2}{T_3 - T_2}. \quad (5)$$

Na brzegach poszczególnych podobszarów dane są następujące warunki:

$$\Gamma_1 : \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{u_1 - T_0}{R}, \quad (6)$$

gdzie R jest oporem cieplnym przenikania ciepła przez formę do otoczenia. Bardziej dokładny opis przepływu ciepła przez formę i do otoczenia nie zmienia w sposób istotny przedstawionej w niniejszym artykule metody. T_0 jest temperaturą otoczenia.

$$\Gamma_{i+1} : u_i = u_{i+1}, \quad i=1,2 \quad (7)$$

Warunki brzegowe uzupełniają warunek początkowy w postaci:

$$U_i(x,0) = U_j(x,0) = U_0$$

$$V_3(0) \equiv V, \quad (8)$$

gdzie U_0 jest temperaturą zalewania formy.

Określony jest również zbiór

$$\Gamma_1 = \{x : \varphi(x) = 0\}. \quad (9)$$

Na zakończenie tej części rozważań zauważmy, że równanie (4) można zapisać w postaci:

$$\vartheta_2 \cdot (C_2 + \frac{q}{T_3 - T_2}) \frac{\partial u_2}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_2 \operatorname{grad} u_2). \quad (10)$$

3. Schemat różnicowy rozwiązania problemu krzepnięcia w przedziale temperatur

W zbiorze V przyjmujemy dyskretny zbiór punktów będących wierzchołkami prostopadkościanów. Oznaczmy zbiór tych punktów przez V_h . Oczywiście każdy punkt zbioru V_h należy do V . Punktem wewnętrznym nazwiemy punkt, którego sześć sąsiednich punktów należy do V_h . Punkty nie będące wewnę-

trznymi nazywamy brzegowymi. Funkcję określoną na zbiorze $V_h \times T_\Delta$ oznaczać będziemy symbolem $U_{h,\Delta}(X,t)$, gdzie przez $U_h \times T_\Delta$ będziemy rozumieć produkt kartezjański zbioru V_h oraz zbioru punktów T_Δ należących do przedziału czasu $[0, \infty)$.

Zgodnie z metodą różnic skończonych równania określające funkcję $U_{i,h,\Delta}(X,t)$ będą następujące:

$$\frac{U_{i,h,\Delta}(X,t+\Delta) - U_{i,h,\Delta}(X,t)}{\Delta} = \frac{1}{a_i[U_{i,h,\Delta}(X,t)]} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{div}_h (\lambda_i [U_{i,h,\Delta}(X,t)]) \cdot \operatorname{grad}_h U_{i,h,\Delta}(X,t)$$

przy czym $X \in V_{ih}(t)$ oraz div_h , grad_h są ilorazami różnicowymi odpowiadającymi operatorom div i grad . W punktach brzegowych poszczególnych obszarów $V_{i,h}(t)$ warunki brzegowe mają postać:

$$\Gamma_{1h} : -\lambda_1 \operatorname{grad}_h U_{1,h,\Delta}(X,t) \cdot \vec{n}_{h,\Delta}(X,t) = \frac{u_{1,h,\Delta}(X,t) - T_0}{x}$$

$$\Gamma_{ih} : \operatorname{grad}_h U_{i,h,\Delta}(X,t) \cdot \vec{n}_{h,\Delta}(X,t) = \operatorname{grad}_h U_{i+1,h,\Delta}(X,t) \cdot \vec{n}_{h,\Delta}(X,t)$$

$$T_{i+1} = U_{i,h,\Delta}(X,t) = U_{i+1,h,\Delta}(X,t) \quad i=1,2$$

W chwili $t = 0$ wartości $U_{i,h,\Delta}(X,0) = U_{3,h,\Delta}(X,0) = U_{h,0}$.

Obszary $V_{i,h,\Delta}(t)$ określamy następująco: jeżeli dane są funkcje $U_{i,h,\Delta}(X,t)$, to obszar

$$V_{2h}(t) = \{x: U_{2,h,\Delta}(X,t) \in [T_2, T_3]\}.$$

Znając obszar $V_{2h}(t)$ znamy tym samym Γ_{2h} . Odejmując od zbioru punktów X ograniczonych zbiorem brzegowym Γ_{2h} zbiór $V_{2h}(t)$ otrzymujemy zbiór $V_{3,h}$, a dalej V_{1h} jest równy różnicy $V_h - (V_{2h} + V_{3h})$.

Otrzymany układ równań jest układem jawnym tzn. $U(X, t+\Delta)$ wyraża się przez $U(X, t)$. Tak więc, przedstawiony powyżej algorytm rozwiązania postawionego zadania polega na obliczaniu funkcji w chwili $t + \Delta t$, jeżeli znamy rozwiązanie w chwili t . Zakłada się tu oczywiście taki dobór kroku siatki Δt , aby schemat jawny był stabilny.

Na bazie przedstawionej wyżej metody przygotowuje się obecnie program obliczeń krzepnięcia wlewka stali uspokojonej o przekroju kwadratowym.

LITERATURA

- [1] Schniewind J.: Solution of the solidifikation problem I.I. Steel Ind/63.
- [2] Dauglas I., Galie T.M.: In the numerical integration Duke Math. I.22/4/55.
- [3] Budak B.M., Wasiliew F.P.: Raznostnyje metody reszenia niekotorych krajewych zadacz type Stefana M.G.U. 1968 r.
- [4] Mochnacki B.: Praca doktorska Politechniki Śląskiej 1970.
- [5] Sajrant R.J., Slack M.R.: I.I. Steel Ind./54.
- [6] Korfel M.: Model matematyczny stygnięcia wlewka Hutnik (69)1.

МОДЕЛЬ НУМЕРИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ОХЛАЖДЕНИЯ СПЛАВОВ
ЗАСТЫВАЮЩИХ В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Р е з ю м е

В работе представляется математическое описание процесса охлаждения сплава застывающего в интервале температуры ΔU , а также предлагается алгоритм численного решения методом конечных разностей.

A MODEL OF THE NUMERICAL SOLUTION OF THE COOLING PROBLEM
OF SOLIDIFYING CASTS IN THE TEMPERATURE INTERVAL

S u m m a r y

A mathematical description of the cooling process of an alloy solidifying in the temperature interval is presented in this paper which also contains the suggestion of an algorithm of a numerical solution based on open difference schemes.