ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Andrzej Miądowicz

ODPOWIEDŹ UKŁADU DYNAMICZNEGO NA CIĄG ZDERZEŃ

Streszczenie: W pracy rozważono odpowiedź układu dynamicznego o jednym stopniu swobody, opisanego liniowym równaniem różniczkowym, na ciąg zderzeń. Za zderzenie przyjęto fakt skokowej zmiany stanu w czasie równym zero, przy czym stan układu po zderzeniu zależy od stanu przed zderzeniem jak i od pewnej wielkości zewnętrznej (niezależnej) w sposób liniowy. Następnie przeanalizowano istnienie stanu ustalonego oraz ruchu okresowego, szczegółowo rozpatrując oscylator harmoniczny.

Rozpatrujemy układ dynamiczny, opisany liniowym równaniem różniczkowym n-tego stopnia, którego stan opisuje n-elementowy wektor y(t).

Związek pomiędzy stanami w różnych chwilach jest następujący:

$$y(t) = h(t,\tau)y(\tau); \tag{1}$$

gdzie:

- $y(\tau)$ i $y(t)$ – stan obiektu w chwili τ i t;
- $h(t,\tau)$ – macierz o wymiarach $n \times n$ będąca całką, ogólną, spełniającą warunek początkowy $y(\tau) = E$;
- E – n-elementowy wektor składający się z samych jedynek.

Ze względu na ciągłość rozwiązań i twierdzenia o wronskianie, spełnione są warunki:

$h(t,t) = \lim\limits_{t\to\tau} h(t,\tau) = 1$ i $\det h(t,\tau) = 0$ dla wszystkich t i τ.

Aby rozważania miały jasny sens fizykalny, dla dalszych rozważań przyjmujemy

$$h(t,\tau) = 0 \quad \text{dla} \quad t < \tau.$$

Równanie zderzenia, które nastąpiło w chwili t wygląda następująco:

$$y_+(t) = A\, y_-(t) + x\,, \tag{2}$$

gdzie:

$y_+(t)$ i $y_-(t)$ - odpowiednio stan układu po zderzeniu i przed zderzeniem;

A - nieosobliwa macierz o wymiarach n x n;

x - elementowy wektor opisujący impuls zewnętrzny.

Interesuje nas odpowiedź układu dynamicznego, którego stan w chwili $t = 0$ opisuje wektor $y(0)$, na ciąg zderzeń zachodzących w następujących po sobie chwilach $t_1, t_2, t_3 \dots$ itd. $(t_1 > 0)$, gdy impulsy zewnętrzne przyjmują wartości $x_1, x_2, x_3, \dots$ itd.

Rozpatrzmy przedział czasu $0 < t < t_1$. Otrzymujemy ze wzoru (1):

$$y(t) = h(t,t_o)y\,(t_o), \tag{3}$$

gdzie: $t_o = 0$

oraz ze wzoru (2):

$$y_+(t_1) = A\,h(t_1,\,t_o)y\,(t_o) + x_1. \tag{4}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\left.\begin{aligned} H(t_n) &= h(t_n,\,t_n) = 1 \\ H(t_n,t_{n-1}) &= Ah(t_n,t_{n-1}) \\ H(t_n,\dots,t_{n-i}) &= Ah\,(t_n,t_{n-1})\,Ah\,(t_{n-1},t_{n-2})\dots Ah(t_{i+1},\,t_i) \\ &\text{dla } n = 1,2,\dots \quad \text{oraz} \quad i = 0,1,\dots,n \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

można stan układu dynamicznego po n-tym zderzeniu przedstawić następująco:

$$y_+(t_n) \sum_{i=1}^{n} H(t_n,\dots,t_i)x_i + H(t_n,\dots,t_o)y(0). \tag{6}$$

Dowodu wymaga jedynie krok indukcyjny bo dla $n = 1$ wzór (6) pokrywa się ze wzorem (4).

Rozpatrując przedział czasu $t_n < t < t_{n+1}$ otrzymujemy ze wzoru (1):

$$y(t) = h(t,t_n) \sum_{i=1}^{n} H(t_n,\dots,t_i)x_i + h(t,t_n)\,H(t_n,\dots,t_o)y(0) \tag{7}$$

i po uwzględnieniu zderzenia w chwili t_{n+1}:

$$y_+(t_{n+1})=Ah(t_{n+1},t_n)\sum_{i=1}^{n} H(t_n,\dots,t_i)x_i+Ah(t_{n+1},t_n)H(t_n,\dots,t_o)y(0)+$$

$$+x_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} Ah(t_{n+1},t_n)H(t_n,\dots,t_i)x_i+H(t_{n+1})x_{n+1}+H(t_{n+1},t_n,\dots,t_o)y(0)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1} H(t_{n+1},\dots,t_i)x_i + H(t_{n+1},\dots,t_o)\,y(0)$$

co kończy dowód zależności (6). Rozwiązanie postawionego zadania podają wzory (5), (6) i (7).

Rozpatrzmy dalej przypadek szczególny zderzeń okresowych o jednakowych impulsach w układzie stacjonarnym:

$$t_n = nT;\quad T>0;\quad x_i = x;\quad h(t,\tau) = h(t-\tau).$$

Ponieważ macierze A i $h(t,\tau)$ są nieosobliwe wzory (5) i (6) można uprościć:

$$H(t_n,\dots,t_i) = (Ah(T))^{n-i}$$

$$y_+(t_n) + \sum_{i=1}^{n} (Ah(T))^{n-i}\,x + (Ah(T))^n y(0). \tag{8}$$

Interesując się istnieniem ruchu okresowego zbadajmy różnicę:

$$y_+(t_{n+m}) - y_+(t_n) = \sum_{i=0}^{m-1} (Ah(T))^{n+i}\,x + ((Ah(T))^{m+n} - (Ah(T))^n)y(0) =$$

$$= (Ah(T))^n \left(\sum_{i=0}^{m-1} (Ah(T))^i\,x + ((Ah(T))^m - 1)\,y(0)\right). \tag{9}$$

Możliwe są następujące przypadki:

a) w stanie ustalonym (tj. dla $n\to\infty$) ruch periodyczny o okresie T jeśli $(Ah(T))^n\to 0$.
   Jak wiadomo, istnieje taka macierz nieosobliwa B i macierz kanoniczna Jordana D że:

$$Ah(T) = BDB^{-1}\quad \text{więc}\quad (Ah(T))^n = BD^nB^{-1}. \tag{10}$$

Macierz $D^n \to 0$ gdy wartości własne λ_i macierzy $Ah(T)$ spełniają nierówność:

$$\max_i |\lambda_i| < 1 \tag{11}$$

b) brak stanu ustalonego - gdy $\max_i |\lambda_i| > 1$ lub gdy $|\lambda_i| = 1$ dla pierwiastka wielokrotnego - wtedy różnica (9) rośnie nieograniczenie.

c) w stanie ustalonym ruch periodyczny o okresie 2kT jeśli $\max_i |\lambda_i| = |\lambda_j| = 1$ i λ_j - pojedyńczy pierwiastek, którego argument jest wymierną częścią kąta π (tzn. istnieją liczby naturalne l i k), że spełniona jest równość:

$$\arg \lambda_j = \frac{l}{k}\pi \tag{12}$$

przy tym l i k nie posiadają wspólnego podzielnika większego od jedności i $l \leqslant k$/a l - jest nieparzyste.

Bowiem z $\lambda_j^k = (-1)^l$ (13)

wynika, że:

$$\lim_{n\to\infty} ((Ah(T))^{k+n} + (Ah(T))^n) = 0. \tag{14}$$

Stąd

$$y_+(t_{n+2k}) - y_+(t_n) = (y_+(t_{n+2k}) - y_+(t_{n+k})) + (y_+(t_{n+k}) - y_+(t_n)) =$$

$$= ((Ah(T))^{k+n} + (Ah(T))^n)\left(\sum_{i=1}^{k-1} (Ah(T))^i x + ((Ah(T))^k - 1)y(0) \to 0.\right. \tag{15}$$

Sprzężony pierwiastek do λ_j ma argument $2\pi - \frac{l}{k}$ i słuszne są dla niego zależności (13), (14) i (15).

Gdy więcej wartości własnych spełnia powyższe warunki okres ruchu wyniesie 2NT - gdzie N jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb k określonych dla kolejnych pierwiastków.

d) brak stanu ustalonego - gdy spełnione są warunki poprzedniego punktu lecz l - parzyste- co powoduje, że (14) nie jest zerem, i że różnica (15) ma stałą wartość. Pod ten przypadek podpada też pojedyńczy pierwiastek $\lambda_j = 1$.

e) ruch prawie okresowy w stanie ustalonym jeśli spełnione są warunki jak w punkcie c lecz argument λ_j nie jest wymierną częścią kąta półpełnego. Można bowiem dobrać liczby l i k tak aby granica (14) była dowolnie mała.

f) stały ruch periodyczny o okresie mT gdy spełnione są warunki:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (Ah(T))^{i} = 0 \quad \text{oraz} \quad (Ah(T))^{m} = 1. \tag{16}$$

Dla $m=1$ bierzemy pod uwagę tylko drugą zależność.

Rozpatrywane przypadki wyczerpują wszystkie możliwości. Ze względu na to, że macierz $Ah(T)$ jest nieosobliwa (brak zerowych wartości własnych) rozważania w punktach c, d i e dotyczyć mogą jedynie stanu ustalonego, gdyż ze wzoru (13) nie wynika że:

$$(Ah(T))^{n+k} + (Ah(T))^{n} = 0$$

dla każdego n.

Ponieważ przypadki opisane w punktach a i b określone są nierównościami a pozostałe równościami, te ostatnie występują niesłychanie rzadko i ze względu na fluktuacje parametrów w realnych układach fizycznych trudno je stwierdzić doświadczalnie.

Zajmijmy się teraz opisem ruchu ustalonego w przypadkach, w których on istnieje.

a) Jeśli spełniona jest równość (11) to macierz:

$$1 - Ah(T) = B(1 - D)B^{-1} \quad \text{jest nieosobliwa,}$$

więc

$$y_{+}(t_n) = \sum_{i=1}^{n} (Ah(T))^{n-i}\, x + (Ah(T))^{n}\, y(0) = (1-Ah(T))^{-1}(1-(Ah(T)^{n})x +$$

$$+ (Ah)T))^{n} y(0) \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{+}(t_n) = (1 - Ah(T))^{-1}\, x.$$

Stan układu pomiędzy zderzeniami wyznaczymy z równania (1).

b) Ponieważ brak wartości własnej równej jeden, macierz $1 - Ah(T)$ jest nieosobliwa i prawdziwy jest wzór (17). Wyznaczmy poszczególne punkty skupienia ciągu $(Ah(T))^{n}$ - jest ich 2 N.
Dla $p = 1,2,\ldots,2N$

$$\lim_{n\to\infty} (Ah(T))^{2Nn+p} = B(\lim_{n\to\infty} D^{2Nn+p})B^{-1} = BD_{o}^{p}B^{-1} = (Ah(T))_{o}^{p},$$

gdzie: D_0 - powstaje z D przez wyzerowanie wszystkich wyrazów na moduł mniejszy od jedności.

W ramach jednego okresu wartości wektora stanu po kolejnych zdarzeniach wyznaczamy w zależności:

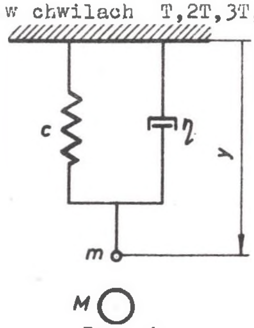
$$y_+(t_p)=(1-Ah(T))^{-1}x+(1-Ah(T))^{-1}(1-(Ah(T))_0^p)x+(Ah(T))_0^p y(0). \qquad (18)$$

Zauważamy, że dodaje się tu do stanu ustalonego występującego w przypadku a) ruch o okresie 2NT, w którym występuje warunek początkowy.

c) W tym przypadku też obowiązują wzory (17) i (18), lecz ponieważ $(Ah(T))^n_*$ ma tu nieskończenie wiele punktów skupienia, p ze wzoru (18) przyjmuje wszystkie wartości naturalne.

d) Obliczamy ze wzoru (8) kolejno wartości wektora stanu dla chwil $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ i stosując wzór (1) otrzymamy cały przebieg w ramach 1-go okresu.

Jako przykład rozpatrzmy układ mechaniczny oscylatora harmonicznego z tłumieniem (rys. 1), który w chwilach T,2T,3T,... itd. uderza masa M z



gdzie $4mc > \eta^2$

Rys. 1

prędkością u , a zderzenie scharakteryzowane jest współczynnikiem odbicia K. Stan oscylatora wyznaczają położenie i prędkość masy m, a równanie (1) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-\beta(t-\tau)}H(t-\tau)\begin{bmatrix} \cos\omega(t-\tau)+\frac{\beta}{\omega}\sin\omega(t-\tau); & \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-\tau) \\ \\ -(\omega+\frac{\beta^2}{\omega}\sin\omega(t-\tau); & \cos\omega(t-\tau)-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega(t-\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(\tau) \\ \\ y(\tau) \end{bmatrix},$$

gdzie: H(t) - funkcja jednostkowa Heaviside'a.

$$\beta = \frac{\eta}{2m}$$

$$\omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4cm-\eta^2}.$$

Występujące w równaniu zderzenia macierz A i wektor x mają tu postać:

$$A = \begin{bmatrix} 1; & 0 \\ 0; & a \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$a = \frac{1-K}{1+\alpha}; \qquad b = \frac{\alpha + K}{1+\alpha}; \quad \alpha = \frac{m}{M}.$$

Ponieważ $0 < K < 1$, liczba a spełnia podobną nierówność:
Wartości własne macierzy Ah(T) spełniają równanie:

$$\lambda^2 - ((1+a)\cos\omega T + \frac{\beta}{\omega}(1-a)\sin\omega T)e^{-\beta T}\lambda + ae^{-2\beta T} = 0 \qquad (19)$$

a jego wyróżnik jest równy:

$$\Delta = e^{-2\beta T}(((1+a)\cos\omega T + \frac{\beta}{\omega}(1-a)\sin\omega T)^2-4a) = e^{-2\beta T}(C^2\sin^2(\omega T+\varphi) - 4a),$$

gdzie:

$$C = \sqrt{(1+a)^2 + \frac{\beta^2}{\omega^2}(1-a)^2}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{1+a}{C}.$$

Przypadek a) wystąpi o ile spełnione są zależności:

$$\Delta > 0 \quad \text{i} \quad \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) < 1$$

lub

$$\Delta < 0 \quad \text{i} \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| < 1.$$

Co po przekształceniach daje:

$$\frac{1}{4}C^2\sin^2(\omega T+\varphi) > a > e^{\beta T}\left||C\sin(\omega T+\varphi)| - e^{\beta T}\right| \qquad (20)$$

lub

$$1 > a > \frac{1}{4}C^2\sin^2(\omega T+\varphi).$$

Górna nierówność może mieć miejsce o ile

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} \quad e^{\beta T} < C\left|\sin(\omega T + \varphi)\right.$$

Powyższe relacje spełnione są np. dla następujących danych: $a = \frac{1}{2}$; $\beta = 3\omega$; $\omega T = \frac{7}{12}\pi$ i dowolnego β - wystąpią tu pierwiastki zespolone.

Interesujące jest, że w przypadku zderzenia sprężystego (k=1 czyli a=0) wyżej wypisane warunki nie mogą być spełnione dla dowolnej kombinacji pozostałych parametrów. Wystąpi wtedy przypadek b), który ma miejsce jeśli mają miejsce przeciwne zależności niż (20).

Równość $|\lambda| = 1$ po przekształceniach daje:

$$a = e^{\beta T}.$$

Można ją spełnić gdy a=1 i β=0, czyli gdy oscylator nie posiada tłumienia a zderzenia są niesprężyste.
Ponieważ w przeprowadzonych rozważaniach masa oscylatora jest stała wprowadzone równania tego przypadku nie obejmują.

Gdy pierwiastki są różne, równania (16) można zapisać w następującej postaci:

$$\sum_{i=0}^{m-1} D^i = 0 \quad i \quad D^m = 1$$

lub

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_j^i = 0 \quad i \quad \lambda_j^m = 1 \qquad dla\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Ponieważ pierwsze równanie nie jest spełnione przez jedynkę i $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i = (1-\lambda)^{-1}(1-\lambda^m)$ cały warunek redukuje się do drugiej równości.

Widać, że dla naszego przykładu najmniejsze m jest równe 3 a ponieważ pierwiastki są sprzężone otrzymamy jedno równanie:

$$\lambda^3 = 1$$

czyli $\lambda_{1,2} = \exp(\pm j\,\frac{2}{3}\pi)$ co daje nierealny warunek

$$a = e^{\beta T}.$$

Ciekawy jest przypadek zderzeń rezonansowych $T = 2k \frac{1}{\omega}$ - wtedy macierz Ah(T) jest diagonalna a jej wartości własne są równe:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = e^{-\beta T}$$

a więc jeśli oscylator posiada tłumienie, zawsze istnieje stan ustalony. Brak tutaj zjawiska rezonansu występującego gdy oscylator pobudzany jest okresowo zmienną siłą. Stwierdziliśmy bowiem, że przy zderzeniach nierezonansowych amplituda drgań w stanie ustalonym może być nawet nieskończona.

LITERATURA

[1] Ф.Р. Гантмахер: Теория матриц, Издательство "Наука", Москва, 1967.

[2] А. Халанай, Д. Векслер: Качественная теория импульсных систем, Издательство "Мир", Москва, 1971.

[3] Skalmierski B.: Dynamika układów mechanicznych, Skrypt Politechniki Śląskiej, Gliwice 1969.

[4] Stiepanow W.W.: Równania różniczkowe, PWN, Warszawa 1964.

ОТВЕТНАЯ РЕАКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СОУДАРЕНИЯ

Р е з ю м е

В статье рассматривается поведение динамической системы с одной степенью свободы, описанной линейным дифференциальным уравнением, под влиянием последовательности соударений. Дальше рассматривается существование установившегося состояния и периодическое движение.

RESPONSE OF DYNAMIC SYSTEM TO A SEQUENCE OF COLLISION

S u m m a r y

In the paper was considred the response of the dynamic system with one-degree, described by a linear differential equation to a sequence of collision. Both steady state and periodic motion were discussed.