ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Bohdan Mochnacki, Wiesław Szadkowski

O PEWNYM SPOSOBIE MODELOWANIA PROCESU PRZEPŁYWU CIEPŁA W KRZEPNĄCYM WLEWKU

Streszczenie: W pracy przedstawiono opis matematyczny procesu krzepnięcia metalu w formie oraz pokazano na przykładzie nieskończonej płyty pewien sposób realizacji numerycznej modelu matematycznego ww. zjawiska

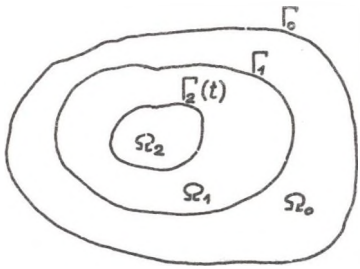
1. Wstęp

Punktem wyjściowym rozważań teoretycznych dotyczących przebiegu zjawiska krzepnięcia i stygnięcia odlewów są modele opisane takim układem równań i warunków, aby można było je rozwiązać za pomocą istniejących metod analizy matematycznej. Rozwiązania analityczne (efektywne) obejmują jednak wąską grupę problemów [1] i okazują się mało przydatne w praktyce inżynierskiej.

Szybki rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej stworzył w ostatnich 15 latach nowe możliwości badań w dziedzinie termodynamiki procesów odlewniczych. Wiąże się to z coraz szerszym wprowadzaniem do analizy procesów cieplnych w odlewnictwie modeli numerycznych. Stosuje się tu przede wszystkim metody typu różnicowego np. [2 3], metodę bilansów [4], zaś ostatnio również metody wariacyjne [5]. Zaproponowana w niniejszej pracy metoda polegająca na przybliżeniu pól temperatury w krzepnącym wlewku rodzinami wielomianów jednej zmiennej, stanowi adaptację metody warstwic przedstawionej w [6] do rozwiązywania problemów związanych z krzepnięciem odlewu w formie.

2. Opis matematyczny procesu krzepnięcia

Rozpatrywany niżej obszar przestrzenny Ω składa się z trzech podobszarów. W chwili t metal zajmuje objętość $\Omega_1 \cup \Omega_2$, przy czym wskaźnik 2 odnosi się do cieczy, zaś wskaźnik 1 do podobszaru ciała stałego. Metal stygnie w formie Ω_0. Na rysunku 1 przez $\Gamma_2(t)$ oznaczono brzeg rozgraniczający dwa stany metalu, zaś Γ_1 i Γ_0 są odpowiednio wewnętrznym i zewnętrznym brzegiem formy.



Rys. 1. Geometria układu odlew-forma

Wprowadzimy niżej następujące oznaczenia

$U_0(X,t)$ temperatura formy, $X \in \Omega_0$

$U_1(X,t)$ temperatura zakrzepłego metalu, $X \in \Omega_1(t)$

$U_2(X,t)$ temperatura metalu ciekłego, $X \in \Omega_2(t)$.

Równanie powierzchni $\Gamma_2(t)$:

$$U_1(X,t) = T_0$$
$$U_2(X,t) = T_0, \tag{1}$$

gdzie: T_0 jest temperaturą przemiany fazowej. Dla uproszczenia przyjęto tu, że metal jest substancją jednorodną i krzepnie w stałej temperaturze. Uogólnienie rozważań na przypadek krzepnięcia stopu w przedziale temperatur nie zmienia istotnie przedstawionej w pracy metody obliczeniowej. Szukane funkcje $U_i(X,t)$ spełniają w podobszarach Ω_i, i=0,1,2 równanie przewodnictwa:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial U_i(X,t)}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda_i \,\mathrm{grad}\, U_i), \tag{2}$$

gdzie:

c_i - właściwa pojemność cieplna

γ_i - gęstość masy

λ_i - współczynnik przewodzenia ciepła.

Zakładamy tu, że w procesie krzepnięcia nie występuje ruch masy ciekłego metalu, a przepływ ciepła zachodzi jedynie drogą przewodzenia w podobszarach Ω_i.

Na brzegu Γ_i przyjmuje się następujący warunek brzegowy:

$$\lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial n} = \lambda_0 \frac{\partial U_0}{\partial n}; \quad i = 1 \text{ U } 2$$
$$U_i = U_0, \tag{3}$$

gdy metal zakrzepły przylega ściśle do formy.

W przypadku gdy między wlewkiem a formą występuje szczelina gazowa, lub stosuje się pokrycie wlewnicy, to warunek (3) przyjmuje postać:

$$-\lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{U_1 - U_o}{R} = -\lambda_o \frac{\partial U_o}{\partial n}, \tag{4}$$

gdzie R - opór cieplny na styku odlewu i formy.

Na brzegu Γ_o:

$$-\lambda_o \frac{\partial U_o}{\partial n} = \alpha (U_o - U_{ot}), \tag{5}$$

gdzie:

α - jest współczynnikiem wnikania ciepła między powierzchnią formy a otoczeniem

U_{ot} - jest temperaturą otoczenia.

Na styku faz (podobszarów Ω_1 i Ω_2):

$$\lambda_2 |\text{grad } U_2(X,t)| - \lambda_1 |\text{grad } U_1(X,t)| = \gamma_1 q \frac{\left|\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|}{|\text{grad } U_1(X,t)|} \tag{6}$$

$$U_1(X,t) = U_2(X,t) = T_o,$$

gdzie q - jest ciepłem przemiany fazowej.

Zbiór warunków brzegowych uzupełnia warunek początkowy zadania w postaci:

$$U_i(X,0) = U_{oi}(X); \quad i = 0,1,2$$
$$\Omega_1(0) = \emptyset \tag{7}$$

oraz warunki geometryczne.

3. Opis modelu numerycznego

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda wyjaśniona zostanie na przykładzie obliczeń krzepnięcia nieskończonej płyty o grubości 2L, przy założeniu stałych wartości parametrów termofizycznych podobszarów. Ponieważ sposób postępowania przy modelowaniu pól temperatury w obrębie formy nie różni się od metody przedstawionej w [6], więc dla uproszczenia rozważań wpływ formy symulujemy warunkiem:

$$-\lambda_i \frac{\partial U_i(L,t)}{\partial x} = \frac{U_i(L,t) - U_{ot}}{R_w}; \quad i = 1 \cup 2, \tag{8}$$

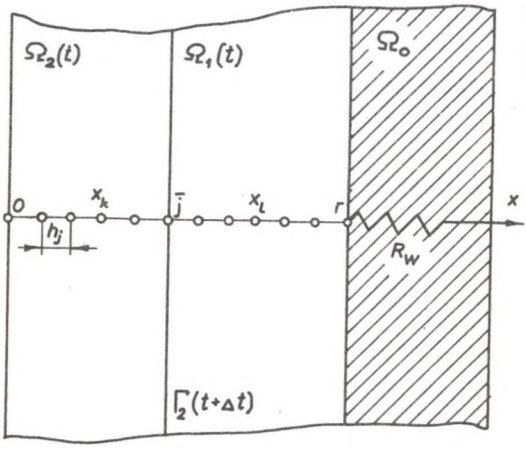
gdzie R_w jest oporem przenikania ciepła przez szczelinę gazową i formę do otoczenia.

W osi symetrii płyty:

$$\frac{\partial U_i(0,t)}{\partial x} = 0; \quad i = 1 \cup 2. \tag{9}$$

Numeryczne rozwiązanie sformułowanego wyżej zadania może być zrealizowane następująco:

Na odcinku $[0,L]$ (rys. 2) przyjmujemy zbiór punktów (węzłów) $x_j, j=0,1...r$ dzielący obszary Ω_1 i Ω_2 na podprzedziały o szerokości $h(x_j)$.



Rys. 2

Załóżmy, że w chwili t znany jest bądź z warunku początkowego, bądź z obliczeń wykonanych uprzednio rozkład funkcji $U_2(X,t)$ i $U_1(X,t)$ w podobszarach $\Omega_2(t)$ i $\Omega_1(t)$. Niech $\Gamma_2(t + \Delta t) = x_{\bar{j}}$.

Pole temperatury w podobszarach $\Omega_2(t)$ i $\Omega_1(t)$ przybliżamy wielomianami

$$U_2(x,t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} A_k(t+\Delta t)x^k$$

$$U_1(x,\ t+\Delta t) = \sum_{l=0}^{m} B_1(t+\Delta t).x^l. \tag{10}$$

Stopień wielomianów $U_2(x,\ t+\Delta t)$ oraz $U_1(x,t+\Delta t)$ zależy od liczby węzłów $x_k (k \leqslant \bar{j})$ oraz $x_1 (1 \leqslant r-\bar{j})$ przyjętych do interpolacji przebiegu funkcji U_2 i U_1 w podobszarach Ω_2 i Ω_1 w rozpatrywanym interwale czasu.

Przyjmując, że w przedziale Δt temperatura w wewnętrznych węzłach interpolacji zmienia się liniowo i wykorzystując równanie (2) mamy:

$$\bigwedge_{x_k \in \{x_j\}} \frac{U_2(x_k,t+\Delta t)-U_2(x_k,t)}{\Delta t} = a_2 \frac{d^2}{dx2}\left[U_2(x,t+\Delta t)\right]_{x=x_k} \tag{11}$$

$$\bigwedge_{x_1 \in \{x_j\}} \frac{U_1(x_1,t+\Delta t)-U_1(x_1,t)}{\Delta t} = a_1 \frac{d^2}{dx^2}\left[U_1(x,t+\Delta t)\right]_{x=x_1}, \tag{12}$$

gdzie $a_i = \dfrac{\lambda_i}{c_i\ \gamma_i}$; $i=1 \cup 2$.

Układ równań (11) (12) liniowych względem $A_k, B_l, U_i(X,t+\Delta t)$ uzupełniają równanie wynikające z warunków brzegowych:

$$x=x_o=0 : \frac{dU_i(0,t+\Delta t)}{dx} = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \ \cup \ B_1=0 \tag{13}$$

$$x=x_r=L : -\lambda_i \frac{d}{dx} U_i(L,t+\Delta t) = \frac{U_i(L,t+\Delta t) - U_{ot}}{R_w} \tag{14}$$

oraz

$$x=x_{\bar{j}}(t+\Delta t) : -\lambda_2 \frac{d}{dx} U_2(x_{\bar{j}},t+\Delta t) = -\lambda_1 \frac{d}{dx} U_1(x_{\bar{j}},t+\Delta t) + q\ \gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{15}$$

równocześnie

$$U_2(x_{\bar{j}},t+\Delta t) = U_1(x_{\bar{j}},t+\Delta t) = T_o. \tag{16}$$

Równania (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16) tworzą układ równań nieliniowych ze względu na A_k, B_l, Δ_x, Δt, $U_i(x_j,t+\Delta t)$ $i=1,2$. Wykażemy niżej dla każdego interwału czasu Δt otrzymany układ równań jest zgodny tzn. liczba niewiadomych jest równa liczbie równań (10)÷(16).

I tak:

$N_1 = r+2$, gdzie N_1 jest liczbą współczynników wielomianów U_1, U_2

$N_2 = \bar{j} - 1 + r - \bar{j} - 1$ gdzie N_2 jest liczbą niewiadomych $U_i(x, t+\Delta t)$ $i = 1,2$

$N_3 = 1$ niewiadomy krok siatki Δx lub Δt.

Liczba niewiadomych wynosi więc:

$$N = 2r + 1^{*)}. \tag{17}$$

Liczba równań typu (10) i (11), które muszą być spełnione w węzłach wewnętrznych podobszarów wynosi:

$$R_1 = 2(r-2) \tag{18}$$

zeń z warunków brzegowych otrzymuje się:

$$R_2 = 5 \tag{19}$$

czyli

$$R = 2r + 1 = N. \tag{20}$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu otrzymuje się rozkład temperatury w podobszarach $\Omega_1(t)$ i $\Omega_2(t)$ w chwili $t + \Delta t$ oraz położenie frontu krystalizacji $x_{\bar{j}}$.

Sposób rozwiązania układu będzie polegał na przyjęciu wielkości przemieszczenia frontu krystalizacji $\Delta x_j = h(x_j)$ - czyli między dwoma sąsiednimi węzłami, zaś interwał czasu dobiera się metodą prób rozwiązując dla przyjętego Δt układ równań liniowych (10) (16) bez (15), a następnie obliczając defekt równania (15) aż do uzyskania żądanej dokładności.

Dla proponowanej metody przygotowano program obliczeń na maszynie cyfrowej WANG 2200. Otrzymane wyniki potwierdzały przydatność metody wielomianów do obliczeń numerycznych procesu krzepnięcia metalu w formie. W chwili obecnej autorzy pracują nad przystosowaniem metody do rozwiązywania problemów wielowymiarowych.

---

*) W rzeczywistości przy praktycznej realizacji modelu numerycznego przez wstawienie (10) do (11) otrzymuje się układ r+3 równań

LITERATURA

[1] Rubinsztein L.I.: Problema Stefana Izd.Zvaigzne Ryga 1967 r.

[2] Dauglas J., Galie T.M.: On the numerical integration .... Duke Math. J.22/4/55.

[3] Budak B.M., Wasiliew F.P.: Raznostnyje metody reszenia niekotorych krajowych zadacz type Stefana M.G.U. 1968 r.

[4] Szargut J., Mochnacki B.: Różnicowy model matematyczny procesu krzepnięcia wlewka. Arch.Hut. XVI/3/71.

[5] Bannerot R., Jamet P.: A second order finite element method for the one - dimensional Stefan problem, Int.J.for N.M in Eng. 8/74.

[6] Mochnacki B.: Metodą warstwicowa numerycznego modelowania pola temperatury ... Z.N.Pol.Śl. En. 42, 42a/72.

О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕХОДА ТЕПЛА В ЗАСТЫВАЮЩЕМ СЛИТКЕ

Р е з ю м е

В работе представляется математическое описание процесса застывания металла, а также даётся на примере бесконечной плиты некоторый способ нумерической реализации математической модели.

A METHOD OF MODELLING THE HEAT TRANSFER PROCESS IN A SOLIDIFIELD BLOOM

S u m m a r y

A mathematical description of the solidifying process of metal in a mould has been presented. The method of realizing such a mathematical model numerically has been illustrated on the example on a infinite plate.