

Bogdan Skalmierski

## WIELOWYMIAROWE ZAGADNIENIA PRZEWYŻSZANIA

**Streszczenie:** Problem przewyższeń danego poziomu przez proces stochastyczny jest istotnym z punktu widzenia teorii niezawodności. Znane rozwiązania tego zagadnienia dotyczą zadania jednowymiarowego [1,5,6,7]. W niniejszej pracy przedstawiono propozycję uogólnienia problemu jednowymiarowego. Teorię zilustrowano kilkoma przykładami.

1. Liczba przekroczeń granicy obszaru

Dany jest obszar  $D$  przestrzeni konfiguracyjnej [3] układu dynamicznego. Niech granicami tego obszaru będą hiperpowierzchnie o równaniach:

$$\Phi_r(q^1, \dots, q^N, t) = 0 \quad (r=1, \dots, L). \quad (1)$$

Założymy, że funkcje  $\Phi_r(q^1, \dots, q^N, t)$  są klasy  $C_1$  w zależności od zmiennych przestrzennych  $q^i$  jak i czasu  $t$  z wyjątkiem zbiorów miary zero. Sam obszar scharakteryzujemy nierównościami

$$\Phi_r(q^1, \dots, q^N, t) \leq 0^{(*)} \quad (2)$$

Dany jest również różniczkowalny proces wielowymiarowy  $\xi^i(t, \omega)$ . Możemy utożsamić proces  $\xi^i(t, \omega)$  z ruchem przypadkowym punktu w przestrzeni konfiguracyjnej tzn. współrzędne  $q^i(t)$  będą tak jak  $\xi^i(t, \omega)$  przypadkowe. Współrzędne  $q^i(t)$  mogą określać np. przypadkowy ruch drgający układu o  $N$  stopniach swobody. Założymy, że ruch ten wywołany jest przyczynami przypadkowymi; procesami o znanych charakterystykach stochastycznych [1,2,3,4,5,6]. Zastanowimy się nad zbudowaniem takiego procesu  $\eta^+(t_0, T)$ ,

\*) Obszar można określić również metodą R-funkcji Rwaczewa. O tym w pracach następnych.

który byłby przypadkową liczbą wyjść procesu  $\xi^1(t, \omega)$  z obszaru D. Ażeby zbudować taki proces posłużymy się własnościami niektórych dystrybucji. Za-uważmy najpierw, że:

$$\bigwedge_{a > 0} \int_{-a}^a \delta(x) dx = 1, \quad (3)$$

gdzie  $\delta(x)$  jest dystrybucją  $\delta$ -Diraca.

Wyobraźmy sobie, że  $x$  jest funkcją pewnego parametru  $t$  i w wyrażeniu (3) zmieniamy zmienne w ten sposób, że zmienną względem której przebiega całkowanie jest właśnie ów parametr; wówczas mamy:

$$\int_{t_0}^{t_0 + T} \delta(x(t)) \dot{x}(t) dt = n. \quad (4)$$

Założmy, że funkcja  $x = x(t)$  jest klasy  $C_1$ .  
z równania

$$x(t) = 0 \quad (5)$$

znajdując punkty  $t_1, t_2, \dots$  przecięcia funkcji  $x = x(t)$  z osią  $t$ . W punktach przejścia przez zero funkcja złożona  $\delta(x(t))$  narasta nieograniczenie, a wyrażenie

$$\int_{-\varepsilon + t_i}^{\varepsilon + t_i} \delta(x(t)) \dot{x}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \dot{x}(t_i) > 0 \\ -1 & \text{gdy } \dot{x}(t_i) < 0 \end{cases} \quad (6)$$

przy dostatecznie małych  $\varepsilon$ .

Stąd  $n$  oznacza różnicę pomiędzy liczbą przejść funkcji  $x(t)$  przez zero z dołu do góry, a liczbą przejść jej z góry w dół. Ażeby móc zliczać tylko przekroczenia zera osobno z dołu do góry i z góry w dół należy nieco zmodyfikować wyrażenie (6) przez uwzględnienie w nim dystrybucji Heavisida. I tak dla przekroczeń zera z dołu do góry należy napisać:

$$\int_{-\varepsilon + t_i}^{\varepsilon + t_i} \delta(x(t)) H(\dot{x}(t)) \dot{x}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \dot{x}(t_i) > 0 \\ 0 & \text{gdy } \dot{x}(t_i) < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Podobnie przy przekroczeniach zera z góry w dół:

$$- \int_{-\varepsilon+t_i}^{\varepsilon+t_i} \delta(x(t)) H(-\dot{x}(t)) \dot{x}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \dot{x}(t_i) > 0 \\ 1 & \text{gdy } \dot{x}(t_i) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Po tych wstępnych wyjaśnieniach przystąpimy do zasadniczego naszego problemu tj. do określenia przypadkowej liczby przekroczeń  $\eta^+(t_0, T)$  granicy obszaru  $D$  przez wielowymiarowy proces  $\xi^i(t, \omega)$ .

Utwórzmy funkcję procesu w ten sposób, że zamiast współrzędnych  $q^i$  spełniającym równanie (1) wstawimy wartości proces  $\xi^i(t, \omega)$

$$\tilde{\Phi}_r = \tilde{\Phi}_r(\xi^1(t; \omega), \dots, \xi^N(t, \omega), t). \quad (9)$$

Jest rzeczą widoczną, że tylko wówczas, gdy składowe wektora  $\xi^i(t, \omega)$  spełniają równanie (1) prawa strona (9) zeruje się. W ten sposób mamy funkcję, która w momencie gdy proces przechodzi przez granicę obszaru jest równa zero, ponadto przyjmuje ona wartości ujemne w obszarze  $D$ .

Funkcja ta, dla każdej realizacji procesu wielowymiarowego jest zależna od czasu, tak jak funkcja  $x(t)$  występująca we wzorach wcześniejszych. W celu określenia procesu  $\eta^+(t_0, T)$  (przypadkowej liczby przekroczeń przez proces  $\xi^i(t, \omega)$  granic obszaru  $D$ ) napiszemy:

$$\eta^+(t_0, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{r=1}^L \frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt} H\left(\frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt}\right) \delta(\Phi_r) dt. \quad (10)$$

Analogicznie można zbudować wyrażenie dla przypadkowej liczby przecięć  $\eta^-(t_0, T)$  granic obszaru  $D$  przez proces wchodzący doń z zewnątrz (wzór analogiczny do (8)).

$$\eta^-(t_0, T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{r=1}^L \frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt} H\left(-\frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt}\right) \delta(\Phi_r) dt. \quad (11)$$

Zauważmy, że:

$$\frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial q^i} \left| \begin{array}{l} \xi^i(t, \omega) + \frac{\partial \tilde{\Phi}_r}{\partial t} \\ q^i = \xi^i(t, \omega) \end{array} \right. \quad (12)$$

Tak więc procesy  $\eta^+(t_0, T)$  oraz  $\eta^-(t_0, T)$  zależą od funkcji  $\Phi_r$  określonej wzorem (9) oraz pochodnej procesu  $\xi^i(t, \omega)$ . Dlatego przy określaniu wartości średniej ilości przekroczeń potrzebna jest znajomość łącznej gęstości rozkładu:

$$q_{\xi^1, \dots, \xi^N, \dot{\xi}^1, \dots, \dot{\xi}^N}(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N | t).$$

Znając tę gęstość można określić wartości średnie i tak:

$$\begin{aligned} \langle \eta^+(t_0, T) \rangle &= \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} q_{\xi^1, \dots, \xi^N, \dot{\xi}^1, \dots, \dot{\xi}^N}(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N | t) \cdot \\ &\cdot \sum_{r=1}^L \frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt} H\left(\frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt}\right) \delta(\tilde{\Phi}_r) dx^1, \dots, dx^N, d\dot{x}^1, \dots, d\dot{x}^N dt \end{aligned} \quad (13)$$

i analogicznie dla procesu  $\eta^-(t_0, T)$

$$\begin{aligned} \langle \eta^-(t_0, T) \rangle &= \\ &= - \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} q_{\xi^1, \dots, \xi^N, \dot{\xi}^1, \dots, \dot{\xi}^N}(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N | t) \\ &\sum_{r=1}^L \frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt} H\left(-\frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt}\right) \delta(\tilde{\Phi}_r) \cdot dx^1, \dots, dx^N d\dot{x}^1, \dots, d\dot{x}^N. \end{aligned} \quad (14)$$

Omówimy obecnie w przykładach kilka szczególnych przypadków:

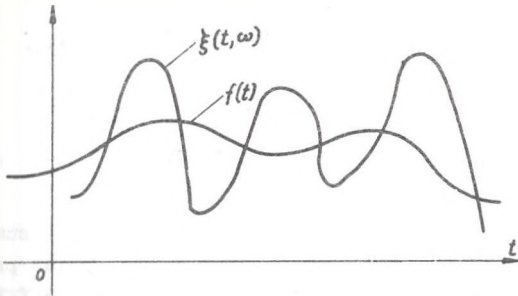
### Przykład 1

Podać wzór na  $\langle \eta^+(t_0, T) \rangle$  w przypadku jednowymiarowym (rys. 1.1). Obszarami będą półproste przez podział osi liczbowej punktem  $q = f(t)$ . W ten sposób obszar D określa nierówność:

$$\Phi_1 = \Phi_1(q, t) = q - f(t) \leq 0. \quad (a)$$

Tworzymy następnie wyrażenia (8)

$$\tilde{\Phi}_1 = \xi(t, \omega) - f(t). \quad (b)$$



Rys. 1.1

Następnie budujemy pochodną

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \dot{\xi}(t) - \dot{f}(t). \quad (c)$$

Obecnie podajemy wzór na średnią ilość przekroczeń z dołu do góry funkcji  $f(t)$  przez proces  $\xi(t)$  w przedziale

$$[t_0, t_0 + T] \quad (\text{wzór (13)})$$

$$\langle \eta^+(t_0, T) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{\xi, \dot{\xi}}(x, \dot{x} | t) (\dot{x} - \dot{f}(t)) H(\dot{x} - \dot{f}(t)) \delta(x - f(t)) dt dx d\dot{x}. \quad (d)$$

Wykorzystując własności funkcji  $\delta$  - Diraca będzie:

$$\begin{aligned} \langle \eta^+(t_0, T) \rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{\xi, \dot{\xi}}(f(t), \dot{x} | t) (\dot{x} - \dot{f}(t)) H(\dot{x} - \dot{f}(t)) dt d\dot{x} = \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\dot{f}(t)}^{\infty} \mathcal{E}_{\xi, \dot{\xi}}(f(t), \dot{x} | t) (\dot{x} - \dot{f}(t)) dt d\dot{x}. \end{aligned} \quad (e)$$

Otrzymany wynik jest znany w literaturze [7], a w szczególności przypadek  $f(t) = a = \text{const}$  [5, 6].

Ciekawy jest problem [7] wyjścia procesu  $\xi(t)$  z obszaru ograniczonego dwiema krzywymi  $f_1(t)$  oraz  $f_2(t)$  takimi, że

$$\bigwedge_{t > 0} f_1(t) > f_2(t). \quad (15)$$

Obszar D określają nierówności

$$\Phi_1 = q - f_1(t) \leq 0$$

$$\Phi_2 = -q + f_2(t) \leq 0.$$

Wykorzystując wzór (9) napiszemy:

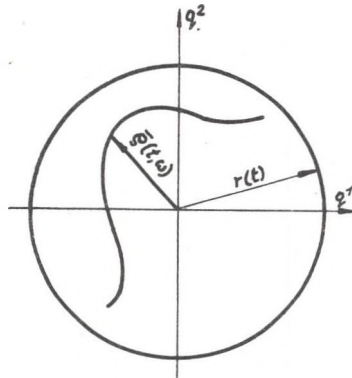
$$\begin{aligned} \langle \eta^+(t_0, T) \rangle = & \left\langle \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ (\dot{S}(t) - \dot{f}_1(t)) H(\dot{S}(t) - \dot{f}_1(t)) \delta(\dot{S}(t) - \dot{f}_1(t)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (-\dot{S}(t) + \dot{f}_2(t)) H(-\dot{S}(t) + \dot{f}_2(t)) \delta(-\dot{S}(t) + \dot{f}_2(t)) \right] dt \right\rangle. \end{aligned} \quad (f)$$

Widać, że średnia ilość wyjść z obszaru  $\langle \eta(t_0, T) \rangle$  będzie równa sumie średniej liczby przewyższeń z dołu do góry krzywej  $y = f_1(t)$  przez proces  $\dot{S}(t, \omega)$  oraz średniej liczby przecięć z góry w dół funkcji  $y = f_2(t)$  przez ten sam proces  $\dot{S}(t, \omega)$ .

### Przykład 2

Określmy obecnie średnią ilość wyjść procesu dwuwymiarowego z koła o promieniu zmieniającym się w czasie  $r(t)$  (rys. 1.2). W naszym przypadku obszar  $D$  określa nierówność

$$\Phi_1 = (q^1)^2 + (q^2)^2 - [r(t)]^2 \leq 0. \quad (a)$$



Rys. 1.2

Korzystając ze wzoru (13) napiszemy:

$$\begin{aligned} \langle \eta^+(t_0, T) \rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T} \iiint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi^1, \xi^2, \dot{\xi}^1, \dot{\xi}^2} (x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2 | t) \cdot \\ &\cdot 2(x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2 - r(t)\dot{r}(t))H(x^1 \dot{x}^1 + x^2 \dot{x}^2 - r(t)r(t))\delta((x^1)^2 + \\ &+ (x^2)^2 - (r(t))^2) \cdot dx^1 dx^2 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt. \end{aligned} \quad (b)$$

Ponieważ funkcja pod  $\delta$ -Diraca zeruje się w dwu przypadkach:

a) gdy  $x^2 = \sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2}$

oraz

b) gdy  $x^2 = -\sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2}$

przeto otrzymamy:

$$\begin{aligned} \langle \eta^+(t_0, T) \rangle &= 2 \int_{t_0}^{t_0+T} \iiint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi^1, \xi^2, \dot{\xi}^1, \dot{\xi}^2} (x^1 \cdot \sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2}, \dot{x}^1, \dot{x}^2 | t) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2\sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2}} (x^1 \dot{x}^1 + \dot{x}^2 \sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2} - r(t)\dot{r}(t))H(x^1 \dot{x}^1 + \dot{x}^2 \\ &\sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2} - r(t)\dot{r}(t)) \cdot dx^1 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt + 2 \int_{t_0}^{t_0+T} \iiint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi^1, \xi^2, \dot{\xi}^1, \dot{\xi}^2} \\ &(x^1, \sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2}, \dot{x}^1, \dot{x}^2 | t) \frac{1}{2\sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2}} (x^1 \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2} - r(t)\dot{r}(t)) \cdot \\ &\cdot H(x^1 \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \sqrt{(r(t))^2 - (x^1)^2} - r(t)\dot{r}(t)) dx^1 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt. \end{aligned} \quad (c)$$

Widać, że  $x^1$  zawarte jest w przedziale  $[-r(t), r(t)]$  zaś całkowanie względem pozostałych zmiennych przebiega po obszarach, dla których wartość funkcji Heaviside'a w obydwu całkach wzoru (c) jest równa 1. Wzór (c) uprości się, gdy założymy  $r(t) = r = \text{const}$  oraz, że proces jest stacjonarny, wówczas:

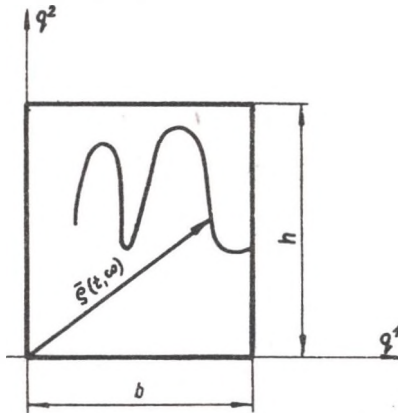
$$\langle \eta^+(t_0, T) \rangle = 2T \int_{-r}^r \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi^1, \xi^2, \dot{\xi}^1, \dot{\xi}^2} (x^1, \sqrt{r^2 - (x^1)^2}, \dot{x}^1, \dot{x}^2) \cdot$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{1}{2\sqrt{r^2-(x^1)^2}} (x^1 \dot{x}^1 + \dot{x}^2 \sqrt{r^2-(x^1)^2}) H(x^1 \dot{x}^1 + \dot{x}^2 \sqrt{r^2-(x^1)^2}) dx^1 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 + \\
 & + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^1, \xi^2, \dot{\xi}^1, \dot{\xi}^2(x^1, -\sqrt{r^2-(x^1)^2}, \dot{x}^1, \dot{x}^2) \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{2\sqrt{r^2-(x^1)^2}} (x^1 \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \sqrt{r^2-(x^1)^2}) H(x^1 \dot{x}^1 - \dot{x}^2 \sqrt{r^2-(x^1)^2}) dx^1 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2.
 \end{aligned} \tag{c1}$$

Analogicznie można zbudować wyrażenie na średnią liczbę wejść procesu do wnętrza koła.

### Przykład 3

Określić średnią ilość wyjść procesu dwuwymiarowego  $\xi^{\pm}(t)$  z prostokąta (rys. 1.3) o wysokości  $h$  i szerokości  $b$ .



Rys. 1.3

W tym przypadku:

$$\Phi_1 = -q^1 \leq 0$$

$$\Phi_2 = q^1 - b \leq 0$$

$$\Phi_3 = q^2 \leq 0$$

$$\Phi_4 = q^2 - h \leq 0. \tag{a}$$

Korzystając ze wzoru (13) napiszemy

$$\langle \eta^+(t_0, T) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{t_0}^{t_0+T} \iiint_{-\infty}^{\infty} \xi^1, \xi^2, \dot{\xi}^1, \dot{\xi}^2(x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2 | t) \cdot [x^1 H(-\dot{x}^1) \delta(x^1) H(x^2) - H(x^2-h) + \\
 & + \dot{x}^1 H(\dot{x}^1) \delta(x^1-b) (H(x^2) - H(x^2-h)) - \dot{x}^2 H(-\dot{x}^2) \delta(-x^2) (H(x^1) - H(x^1-b)) + \\
 & + \dot{x}^2 H(\dot{x}^2) \delta(x^2-h) (H(x^1) - H(x^1-b))] dx^1 dx^2 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^h \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2}(0, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2 | t) (-\dot{x}^1) dx^2 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^h \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2}(b, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2 | t) \dot{x}^1 dx^2 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2}(x^1, 0, \dot{x}^1, \dot{x}^2 | t) (-\dot{x}^2) dx^1 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2}(x^1, h, x^1, x^2 | t) \dot{x}^2 dx^1 d\dot{x}^1 d\dot{x}^2 dt. \quad (1)
\end{aligned}$$

Funkcje Heavside'a jakie pojawiły się w pierwszej części wzoru (b) zabezpieczyły przed zliczeniem przecięcia prostych opisanych równaniami (a) poza krawędziami prostokąta (grały rolę funkcji charakterystycznej brzegu obszaru). Podobnych problemów można byłoby mnożyć. Istotne są wzory ogólne (13), (14) będące podstawą do rozwiązywania podobnych zagadnień. W teorii układów dynamicznych może nas interesować rozkład gęstości procesów  $\eta^+(t_0, T)$  czy  $\eta^-(t_0, T)$ . Znając bowiem rozkład prawdopodobieństwa tych procesów można określić prawdopodobieństwo wyjścia czy wejścia z obszaru D procesu w określonym interwale czasowym. Dokładne rozwiązanie tego zagadnienia jest możliwe [6] ale zarazem dość złożone. Problem znacznie się upraszcza wówczas, gdy mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem, kiedy średnia liczba wejść czy wyjść z obszaru D w danym przedziale czasu jest na tyle mała, że kolejne wyjścia czy wejścia można uważać za zdarzenia niezależne. Te założenia upoważniają do przyjęcia, że liczba wyjść czy wejść ma rozkład Poissona to znaczy:

$$P\{\eta^+(t_0, T) = m\} = \frac{1}{m!} \langle \eta^+(t_0, T) \rangle^m \cdot \exp[-\langle \eta^+(t_0, T) \rangle]. \quad (15)$$

p.2. Średni czas przebywania procesu  $\xi^1(t, \omega)$  poza obszarem D względnie w obszarze D w interwale czasowym  $[t_0, t_0+T]$  oraz w czasie jednego wyjścia czy wejścia do obszaru D.

W poprzednim punkcie założyliśmy znajomość rozkładów

$$\varepsilon_{\xi^1, \dots, \xi^N, \dot{\xi}^1, \dots, \dot{\xi}^N}(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N | t).$$

Na tej podstawie możemy określić gęstość  $\varepsilon_{\xi^1, \dots, \xi^N}(x^1, \dots, x^N | t)$  gdyż rozkłady te są zgodne

$$\varepsilon_{\xi^1, \dots, \xi^N}(x^1, \dots, x^N | t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\xi^1, \dots, \xi^N, \xi^1, \dots, \xi^N}(x^1 \dots x^N \dot{x}^1, \dot{x}^N | t) x dx^1 \dots dx^N. \quad (1)$$

Rozkłady (1) pozwalają określić prawdopodobieństwo przebywania procesu w danej chwili  $t$  w dowolnym obszarze przestrzeni. Tak więc prawdopodobieństwo, że proces znajduje się poza obszarem  $D$  jest równe

$$P\{\xi^i(t, \omega) \notin D\} = \int_{(x^1, \dots, x^N) \in D} \dots \int_{(x^1, \dots, x^N) \in D} \varepsilon_{\xi^1, \dots, \xi^N}(x^1, \dots, x^N | t) dx^1, \dots, dx^N. \quad (2)$$

Np. dla przypadku jednowymiarowego prawdopodobieństwo, że wartość procesu  $\xi(t, \omega)$  w danej chwili będzie większa od poziomu  $y=f(t)$  określi wzór:

$$P\{\xi(t, \omega) > f(t)\} = \int_{f(t)}^{\infty} q_{\xi}(x | t) dx. \quad (2a)$$

Wracamy teraz do przypadku ogólnego.

Zauważmy, że w interwale czasowym  $[t, t + dt]$  proces może znajdować się albo w obszarze  $D$  albo na zewnątrz tego obszaru. Wartość średnia czasu przebywania poza obszarem  $D$  (to samo można mówić o przebywaniu w obszarze  $D$ ) będzie równa:

$$\langle \Delta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{dt} \right) dt, \quad (3)$$

gdzie

$$\Delta_i = \begin{cases} dt & \text{gdy } \xi^i(t, \omega) \notin D \\ 0 & \text{gdy } \xi^i(t, \omega) \in D \end{cases}. \quad (3a)$$

Wyrażenie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{dt} = p \left\{ \xi^i(t, \omega) \notin D \right\}. \quad (4)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \langle \Delta \rangle = dt P \left\{ \xi^i(t, \omega) \notin D \right\} &= dt \int \dots \int_{(x^1, \dots, x^N) \notin D} g_{\xi^1, \dots, \xi^N}(x^1, \dots, x^N | t) \cdot \\ &\cdot dx^1, \dots, dx^N. \end{aligned} \quad (5)$$

Możemy zatem bez trudu określić średni czas  $\langle \tau^+ \rangle$  przebywania procesu  $\xi^i(t, \omega)$  poza obszarem  $D$  w interwale czasowym  $[t_0, t_0 + T]$  jako sumę czasów średnich

$$\langle \tau^+ \rangle = \int_{t_0}^{t_0 + T} \int \dots \int_{(x^1, \dots, x^N) \notin D} g_{\xi^1, \dots, \xi^N}(x^1, \dots, x^N | t) dx^1, \dots, dx^N dt. \quad (6)$$

Dla procesu stacjonarnego wzór (6) upraszcza się do postaci

$$\langle \tau^+ \rangle = T \int \dots \int_{(x^1, \dots, x^N) \notin D} g_{\xi^1, \dots, \xi^N}(x^1, \dots, x^N) dx^1, \dots, dx^N. \quad (6a)$$

Widać, że średni czas przebywania poza obszarem  $D$  jest proporcjonalny w tym przypadku do czasu obserwacji  $T$ .

Znając średni czas  $\langle \tau^+ \rangle$  przebywania procesu poza obszarem  $D$  oraz średnia ilość przekroczeń  $\langle \eta^+(t_0, T) \rangle$  granicy obszaru  $D$  na zewnątrz przez proces  $\xi^i(t, \omega)$  można określić [6] średni czas przebywania  $\Delta \tau$  procesu poza obszarem  $D$  w czasie jednego przekroczenia granic obszaru  $D$  przez proces  $\xi^i(t, \omega)$

$$\langle \Delta \tau \rangle = \frac{\langle \tau^+ \rangle}{\langle \eta^+(t_0, T) \rangle}. \quad (7)$$

Dla procesu stacjonarnego będzie oraz ograniczeń (1) niezależnych od czasu

$$\langle \Delta T \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N) R(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N) dx^1 \dots dx^N d\dot{x}^1 \dots d\dot{x}^N}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N) dx^1 \dots dx^N d\dot{x}^1 \dots d\dot{x}^N} \quad (7a)$$

gdzie

$$R(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N) = \sum_{r=1}^L \left[ \frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt} H\left(-\frac{d\tilde{\Phi}_r}{dt}\right) \delta(\tilde{\Phi}_r) \right]_{\substack{\tilde{x}^i = x^i \\ \dot{\tilde{x}}^i = \dot{x}^i}} \quad (8b)$$

### 3. Uwagi ogólne

Wyprowadzone wzory, jak widzieliśmy, umożliwiają znalezienie średniej liczby przekroczeń, średniego czasu przebywania w określonym obszarze w żądanym przedziale czasu oraz średniego czasu przebywania w danym obszarze przy jednokrotnym akcie przekroczenia granic. Wzór (6) można byłoby otrzymać na nieco innej drodze. Zauważmy, że przypadkowy czas przebywania poza obszarem D w interwale czasowym  $[t_0, t_0+T]$  wyniesie:

$$\tau^+ = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ 1 - \prod_{r=1}^2 H(-\Phi_r) \right] dt,$$

gdzie  $H(t)$  - dystrybucja Heaviside'a.

Uśredniając  $\tau^+$  oraz korzystając z twierdzenia Fubini'ego o produkowaniu miar otrzymujemy wzór (6). We wszystkich tych przypadkach postuluje się znajomość funkcji

$$\delta_{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N, \dot{\tilde{x}}^1, \dots, \dot{\tilde{x}}^N}(x^1, \dots, x^N, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^N | t).$$

Jest to pewna niedogodność, którą w pewnych przypadkach można pokonać. Jeśli np. korzystamy z metod korelacyjnych [3] prowadzących do wyznaczania korelacji procesu będącego reakcją dynamiczną układu na zakłócenia stochastyczne, to przy założeniu normalności procesu problem jest dość prosty (por [6]). Wyjściem z tej trudnej sytuacji mogą być również równania Fokkera-Plancka-Koźmogorowa, z których można bezpośrednio wyznaczyć

żądaną gęstość prawdopodobieństwa [1]. Następne prace będą poświęcone problemom wyznaczania gęstości

$$g \xi^1, \dots, \xi^N, \dot{\xi}^1, \dots, \dot{\xi}^N(x^1, \dots, \dot{x}^N | t)$$

w układach liniowych i nieliniowych. Prace z tego zakresu są już rozpracowane.

#### LITERATURA

- [1] Grandall S.H.: (Editor) Random vibration, vol 2 Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts 1963.
- [2] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN Warszawa 1972.
- [3] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków, PWN Warszawa 1973.
- [4] Skalmierski B., Tylikowski A.: Stabilność układów dynamicznych, PWN Warszawa 1973.
- [5] Stratonowicz R.L.: Izbrannyje woprosy teorii fluktuacji w radiotechnice, Izdatielstwo "Sowietskoje Radio" Moskwa 1961.
- [6] Swiesznikow A.A.: Podstawowe metody funkcji losowych, PWN Warszawa 1965.
- [7] Tichonow W.I.: Wybrosy szluczajnych procesów, Izd. "Nauka" 1970.

#### МНОГОМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

#### Резюме

Превосхождение горизонтальной через случайный процесс это настоящая проблема теории надёжности. Известные решения этой проблемы относятся к одномерным задачам. В этой работе представляется предположение обобщения одномерной задачи. Эта теория иллюстрируется несколькими примерами.

## THE MULTIDIMENSION'S PROBLEM OF EXCEEDING

## S u m m a r y

The problem of exceeding levels in stochastic process is an essential problem in reliability theory. One-dimensional problem has a well-known solution. Generalization of one dimensional problem was presented in the paper. Some examples were added.