ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Jerzy Skrzypczyk

UWAGI O PRZYBLIŻONYCH METODACH ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ OPERATOROWYCH W ε-ŁAŃCUCHOWYCH PRZESTRZENIACH BANACHA

Streszczenie: Rozpatrzono równanie operatorowe Ax+Bx=x w domkniętym i ograniczonym wypukłym podzbiorze T zupełnej, metrycznej przestrzeni ε-łańcuchowej. Przedstawiono i udowodniono twierdzenia o istnieniu rozwiązań równania operatorowego. Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie: jeżeli A jest operatorem pełnociągłym, B operatorem (ε,η) - jednostajnie, lokalnie zbliżającym to istnieje w T co najmniej jedno rozwiązanie równania operatorowego. Pokazano zastosowanie na przykładzie losowego, nieliniowego równania całkowego typu Wolterry-Fredholma II-rodzaju:

$$x(t,w) = z(t,w) + \int_0^t k(t,s,w)f(s,x(s,w),w)ds +$$

$$+ \int_0^\infty h(t,s,w)g(s,x(s,w),w)ds,$$

w przedziale czasowym nieograniczonym.

Wstęp

Przybliżone metody rozwiązywania równań operatorowych różnych typów znalazły bardzo obszerne opracowanie w literaturze matematycznej. Do najbardziej klasycznych wyników w tej dziedzinie należą: twierdzenie Banacha o punkcie stałym operatora oraz twierdzenie Schaudera [2,3]. W 1955 roku M.A. Krasnosielskij uogólnił wyniki Banacha i Schaudera formułując dla równania:

$$x=Ax + Bx \tag{1}$$

następujące twierdzenie [1]: niech T będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem wypukłym przestrzeni Banacha X; niech A i B będą operatorami nieliniowymi określonymi na T o wartościach w X. Jeżeli:

(i) $Ax+By \in T$ dla $x,y \in T$;

(ii) operator A jest pełnociągły;

(iii) operator B jest zbliżający w T;

wówczas istnieje co najmniej jeden punkt stały x' tzn.

$$x' = Ax' + Bx'.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że w 1961 roku M. Edelstein [5] uogólnił twierdzenie Banacha na (ε,η) - jednostajnie, lokalnie zbliżające operatory, nasuwa się pytanie, czy nie da się w analogiczny sposób wzmocnić twierdzenia Krasnosielskiego. Próba odpowiedzi na to pytanie zawarta jest w pracy.

Definicje i oznaczenia

Zanim przystąpimy do zasadniczej części rozważań sformułujemy określenia pewnych pojęć, co do których mogłyby powstać wątpliwości.

Definicja 1 [5] Niech X będzie przestrzenią metryczną z metryką d. Odwzorowanie A przestrzeni X w siebie $(A:X\to X)$ nazwiemy (ε,η) - jednostajnie, lokalnie zbliżającym, jeżeli

$$\exists_{\varepsilon>0}\ \exists_{0\leqslant\eta<1}\ \forall_{x\in X}\ p,q\in K(x,\varepsilon)\Longrightarrow d(Ap,Aq)\leqslant\eta d(p,q),$$

gdzie $K(x,\varepsilon) := \{y:\ d(x,y)<\varepsilon\}$. Przez $\overline{K(x,\varepsilon)}$ rozumiemy domknięcie kuli K w naturalnej metryce przestrzeni X.

Definicja 2 [5] Przestrzeń metryczną X nazwiemy ε-łańcuchową jeżeli dla każdego $\varepsilon>0$ i każdej pary $p,q\in X$ istnieje skończony zbiór punktów $p=x^0$, $x^1,\ldots,x^n = q$ tej przestrzeni spełniających relację:

$$d(x^{i-1},x^i)<\varepsilon,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Definicja 3. [5] Będziemy mówić, że podzbiór T przestrzeni metrycznej X jest wypukły w sensie Mengera, jeżeli dla każdej pary $p,q\in T$ istnieje punkt $r\in T$, taki, że

$$d(p,q) = d(p,r) + d(r,q).$$

Uwaga. Zauważmy, że domknięty i ograniczony, wypukły podzbiór T przestrzeni Banacha X, jest wypukły w sensie Mengera. Fakt ten będzie później wykorzystany.

Przejdziemy teraz do sformułowania głównych wyników.

Metoda kolejnych przybliżeń i odwracalność odwzorowań

Dla zachowania kompletności rozważań podany zostanie z nowym dowodem wynik osiągnięty przez Edelsteina.

Twierdzenie 1. [5] Niech X będzie ε-łańcuchową przestrzenią metryczną zupełną i A odwzorowaniem przekształcającym X w siebie, (ε,η) - jednostajnie, lokalnie zbliżającym. Wówczas spełnione są następujące warunki:

(i) dla każdego $x^0 \in X$ ciąg $x^n := A^n x^0$ $(A^n x := AA^{n-1}x)$ jest zbieżny do $\tilde{x} \in X$ i $\tilde{x}$ jest punktem stałym odwzorowania;

(ii) punkt $\tilde{x}$ jest jedynym punktem stałym odwzorowania A.

Dowód. (i) Niech x^0 jest pewnym, określonym punktem przestrzeni X. Zdefiniujemy ciąg kolejnych przybliżeń

$$x^k := Ax^{k-1}, \quad x^1 := Ax^0. \tag{2}$$

Ponieważ $A:X \to X$ więc $Ax^0 \in X$ i $d(Ax^0, x^0) < \infty$. Z faktu, że X jest ε-łańcuchową przestrzenią metryczną, wynika fakt istnienia skończonej ilości N takich punktów tej przestrzeni, że

$$Ax^0 = p_1^1,\ p_2^1, \ldots\ldots, p_N^1 = x^0 \tag{3}$$

i spełnienia zależności: $d(p_{i+1}^1, p_i^1) < \varepsilon$ dla $i=1,2,\ldots,N-1$, (ε-ustalona wielkość występująca w określeniu przestrzeni ε-łańcuchowej (def. 3)). Dalej przyjmiemy oznaczenia $p_i^k := Ap_i^{k-1}$, dla $i=1,2,\ldots,N$ i $k=1,2,\ldots$

Ponieważ $d(p_{i+1}^1, p_i^1) < \varepsilon$, więc z analogicznych rozważań jak przy dowodzie klasycznego twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika:

$$d(p_{i+1}^k, p_i^k) \leqslant \eta^{k-1}\varepsilon < \varepsilon. \tag{4}$$

Mamy

$$d(x^{k+1}, x^k) = d(Ax^k, Ax^{k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant d(Ap_1^k, Ap_2^k) + d(Ap_2^k, Ap_3^k) + \ldots + d(Ap_{N-1}^k, Ap_N^k) \leqslant$$

$$\leqslant \eta\left[d(p_1^k, p_2^k) + d(p_2^k, p_3^k) + \ldots + d(p_{N-1}^k, p_N^k)\right]. \tag{5}$$

Korzystając z warunku (4) otrzymamy:

$$d(x^{k+1}, x^k) \leqslant \eta^k N\varepsilon.$$

Dalej mamy

$$d(x^{m+k}, x^m) \leqslant d(x^{m+k}, x^{m+k-1}) + d(x^{m+k-1}, x^m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} d(x^{m+j+1}, x^{m+j}). \tag{6}$$

Wykorzystując relacje (5) i (6), z własności postępu geometrycznego otrzymamy

$$d(x^{m+k},x^m)\leqslant \eta\sum_{j=0}^{k-1}\left[d(p_1^{m+j},\ p_2^{m+j})+ d(\ p_2^{m+j},\ p_3^{m+j})+\ldots+d(p_{N-1}^{m+j},\ p_N^{m+j})\right] \leqslant$$

$$\leqslant \eta\sum_{j=0}^{k-1}\eta^{m+j}\left[d(p_1^1,\ p_2^1)+ d(p_2^1,\ p_3^1)+\ldots+ d(p_{N-1}^1,\ p_N^1)\right] =$$

$$= \eta^m\ \frac{1-\eta^k}{1-\eta}\left[d(p_1^1,\ p_2^1)+ d(p_2^1,\ p_3^1)+\ldots+d(p_{N-1}^1,\ p_N^1)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta^m}{1-\eta}\left[d(p_1^1,\ p_2^1) + d(p_2^1,\ p_3^1)+\ldots+d(p_{N-1}^1,\ p_N^1)\right].$$

Oczywiście

$$d(x^{m+k},\ x^m)\leqslant \frac{\eta^m}{1-\eta}\ N\varepsilon .$$

Widzimy stąd, że ciąg $\{x^k\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z zupełności przestrzeni X wynika istnienie $\tilde{x}\in X$, że $x^k \longrightarrow \tilde{x}$. Z ciągłości odwzorowania wynika $A\tilde{x} = \tilde{x}$.

(ii) Dowód jednoznaczności wynika z ogólnych własności granicy.

Dalej rozwiniemy ideę Edelsteina i przedyskutujemy dalsze własności odwzorowań (ε,η) - jednostajnie lokalnie zbliżających.

LEMAT. Niech X będzie ε-łańcuchową przestrzenią metryczną zupełną, a T przestrzenią metryczną. Niech $\{A_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną jednakowo (ε,η) - jednostajnie, lokalnie zbliżających odwzorowań przestrzeni X w siebie, tzn.

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\quad \underset{0\leqslant\eta<1}{}\quad \underset{x\in X}{\forall}\ p,q\in K(x,\varepsilon) \Longrightarrow \underset{t\in T}{\forall}\ d(A_t p,A_t q)\leqslant \eta d(p,q).$$

Niech dla każdego $t\in T$ odwzorowanie $T\ni t \longrightarrow A_t x\in X$ będzie ciągłe na T.

Wtedy dla każdego $t\in T$ istnieje punkt stały $\tilde{x}(t)$ odwzorowania A_t, tzn. $A_t\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)$ i odwzorowanie $T\ni t\longrightarrow \tilde{x}(t)\in X$ jest ciągłe na T (rozwiązanie jest jednoznaczne, dla każdego $t\in T$ istnieje tylko jedno $\tilde{x}(t)$).

Dowód.

Dla każdego $t\in T$ istnienie $\tilde{x}(t)\in X$, takiego, że

$$A_t\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)$$

wynika z twierdzenia 1. Pokażemy tylko ciągłość odwzorowania $t \to \tilde{x}(t)$. Określmy punkt t_0 i odpowiadający mu element $\tilde{x}(t_0)$. Ciąg kolejnych przybliżeń utworzymy w następujący sposób:

$$x^0 := \tilde{x}(t_0),\ x^1 := A_t \tilde{x}(t_0) \ldots\ldots\ldots,\ x^n := A_t x^{n-1} = A_t^n \tilde{x}(t_0).$$

Z poprzednich rozważań łatwo wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \tilde{x}(t_0).$$

Ustalmy ponownie (ε, η) dla przestrzeni X. Wówczas z faktu, że $\tilde{x}(t_0) \in X$ i z ciągłości A_t wynika istnienie skończonej liczby M elementów t_k przestrzeni $X, k=1,2,\ldots,M$, takich, że

$$A_t \tilde{x}(t_0) = A_{t_1} \tilde{x}(t_0),\ A_{t_2} \tilde{x}(t_0), \ldots\ldots, A_{t_m} \tilde{x}(t_0) = A_{t_0} \tilde{x}(t_0) = x^0. \tag{8}$$

Stosując nierówność (7) otrzymamy

$$d(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t_0)) = d(\tilde{x}(t), x^0) \leqslant \frac{1}{1-\eta}\Big[d(A_{t_1} \tilde{x}(t_0), A_{t_2}\tilde{x}(t_0)) +$$

$$+ d(A_{t_2} \tilde{x}(t_0), A_{t_3} \tilde{x}(t_0)) + \ldots + d(A_{t_{M-1}} \tilde{x}(t_0), A_{t_0} \tilde{x}(t_0))\Big].$$

Korzystając z ciągłości odwzorowania $t \to A_t x$ dla $x = \tilde{x}(t_0)$

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\gamma>0}\ d(t,t_0) < \gamma \Longrightarrow d(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t_0)) < \delta \text{ c.n.d.}$$

Twierdzenie 2. Niech $\overline{K(0,r)}$ będzie domkniętą kulą w przestrzeni Banacha X. Niech S będzie odwzorowaniem tej kuli w przestrzeni X, posiadającym następujące własności:

(i) $S0=0$, 0 jest elementem zerowym przestrzeni X;

(ii) S jest (ε, η) - jednostajnie lokalnie zbliżającym odwzorowaniem w K.

Wówczas równanie:

$$Sx + y = x$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $y \in \overline{K(0,(1-\eta)r)}$. Oznaczmy to rozwiązanie przez Ry. Odwzorowanie R posiada własności:

1° $R0=0$;

2° $\|Ry - Ry'\| \leqslant \frac{1}{1-\eta} \|y - y'\|$ dla $y, y' \in \overline{K(0,(1-\eta)r)}$.

Dowód. Zdefiniujemy rodzinę odwzorowań $\{A_y\}$, $y \in \overline{K(0,(1-\eta)r)}$
$\overline{K(0,r)} \ni x \longrightarrow A_y x := (y + Sx) \in X.$

Oszacujemy normę operatora S. W tym celu zauważmy, że $\overline{K(0,r)}$ jest zbiorem wypukłym w sensie Mengera, skąd wynika, że dla każdego $x \in \overline{K(0,r)}$ istnieje skończona ilość elementów p_i,

$$x=p_1,p_2,\dots\dots,p_N = 0$$

takich, że

$$\|p_{i-1} - p_i\| = \varepsilon_i, \quad \text{dla} \quad i=1,2,\dots,N,$$

gdzie ε_1 - pewna stała dodatnia. Dla dalszych rozważań niech ε_1 odpowiada ε z definicji odwzorowania lokalnie zbliżającego.

$$\|S\| = \sup_{\substack{x \in \overline{K(0,r)} \\ \|x\| \leqslant 1}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \frac{\|Sp_1-Sp_2\| + \|S_{p2}-Sp_3\| +\dots\dots+ \|Sp_{N-1}-Sp_N\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \eta \sup \frac{\|p_1-p_2\| + \|p_2-p_3\| +\dots\dots+ \|p_{N-1}-p_N\|}{\|x\|} = \eta.$$

Korzystając z tego faktu pokażemy, że $A_y : \overline{K(0,r)} \longrightarrow \overline{K(0,r)}$.

$$\|A_y x\| = \|y + Sx\| \leqslant \|y\| + \|S\| \, \|x\| \leqslant (1-\eta)r + \eta r = 1.$$

Aby wykazać, że rodzina $\{A_y\}$, $y \in \overline{K(0,(1-\eta)r)}$ spełnia założenia lematu, zauważmy, że

$$\|A_y x - A_y x'\| = \|y + Sx - y - Sx'\| = \|Sx - Sx'\| \leqslant \eta \|x - x'\|.$$

Ostatnią nierówność dowodzi się jak oszacowania normy operatora S.

Z lematu wynika, że dla każdego A_y istnieje jeden punkt stały $\bar{x}(y) \in \overline{K(0,r)}$. Określmy operator R: $Ry := \bar{x}(y)$ tzn.

$$Ry = y + SRy.$$

Z faktu, że $S0=0$ wynika $R0=0$. Udowodnimy teraz własność 2^o.

Niech $y, y' \in \overline{K(0,(1-\eta)r)}$

$$\|Ry - Ry'\| \leqslant \|y - y'\| + \|SRy - SRy'\| \leqslant$$
$$\leqslant \|y - y'\| + \eta \|Ry - Ry'\|,$$

ponieważ odwzorowanie S jest w kuli $\overline{K(0,r)}$ zbliżające (jw).

Stąd

$$\|Ry - Ry'\| \leqslant \frac{1}{1-\eta} \|y - y'\|, \quad \text{c.n.d.}$$

Uwaga. Teza twierdzenia pozostanie prawdziwa jeżeli zamiast $\overline{K}$ rozpatrywać dowolny ograniczony i domknięty zbiór wypukły w X.

Nietrudno pokazać, że prawdziwa jest, ogólniejsza w pewnym sensie wersja twierdzenia 2.

Twierdzenie 2. Niech S będzie odwzorowaniem przestrzeni Banacha ε-łańcuchowej X w siebie, posiadającym następujące własności:

(i) $S0 = 0$;

(ii) $Sx + y \in X$ dla $x, y \in X$;

(ii) S jest (ε, η) - jednostajnie, lokalnie zbliżającym odwzorowaniem w X.

Wówczas równanie $Sx + y = x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $y \in X$. Oznaczmy to odwzorowanie przez Ry (rozwiązanie równania dla ustalonego y). Odwzorowanie Ry jest ciągłe w X.

Sformułujemy teraz i udowodnimy wariant twierdzenia Krasnosielskie dla przestrzeni ε-łańcuchowych.

Twierdzenie 3. Niech T oznacza domknięty i ograniczony podzbiór wypukły przestrzeni Banacha ε-łańcuchowej. X.A i B są operatorami (nieliniowymi) określonymi na T o wartościach w X. Niech będą spełnione warunki:

(i) $Ax + By \in T$ dla $x, y \in T$;

(ii) operator A jest pełnociągły;

(iii) operator B jest (ε, η) - jednostajnie, lokalnie zbliżający.

Wówczas istnieje co najmniej jeden punkt stały x', tzn.

$$Ax' + Bx' = x'.$$

Dowód

Z poprzednich rozważań wynika, że z założenia (iii) można wywnioskować że operator B spełnia w T globalny warunek Lipschitza ze stałą mniejszą od 1. Reszta jest wnioskiem ze znanego twierdzenia.

Przykład. Pokażemy zastosowanie podanych rozważań na przykładzie równania całkowego mieszanego typu Volterry-Fredholma zapisanego w postaci:

$$x(t,w) = z(t,w) + \lambda\int_0^t k(t,s,w)\, f(s,x(s,w),w)ds +$$
$$+ \gamma\int_0^\infty h(t,s,w)g(s,x(s,w),w)ds, \text{ dla } t \in [0,\infty). \tag{9}$$

Oznaczenia są następujące:

(i) $w \in \Omega$, Ω -zbiór zdarzeń elementarnych przestrzeni probabilistycznej opisanej przez trójkę uporządkowaną (Ω,σ,P);

(ii) $z(t,w)$ - jest znanym procesem stochastycznym mierzalnym;

(iii) $x(t,w)$ - jest nieznanym procesem stochastycznym;

(iv) jądro Volterry $k(t,s,w)$ jest mierzalnym polem losowym określonym na $\Omega \times \Delta$, gdzie $\Delta := \{(t,s): 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$;

(v) jądro Fredholma $h(t,s,w)$ jest mierzalnym polem losowym określonym na $\Omega \times \Delta_1$, gdzie $\Delta_1 := \{(t,s): 0 \leqslant t,s < \infty\}$;

(vi) $f(t,x,w)$ i $g(t,x,w)$ są polami losowymi określonymi na $R^1_+ \cdot R^n \cdot \Omega$ spełniającymi następujące warunki: dla każdego skończonego $t \in R^1_+$ f i g są z prawdopodobieństwem 1 borelowskimi funkcjami x i dla skończonych wartości t i x

$$E|f(t,x,w)| < \infty \quad \text{i} \quad E|g(t,x,w)| < \infty.$$

(vii) λ, γ są parametrami rzeczywistymi. $R^1_+ := [0,\infty)$, R^n jest n-wymiarową przestrzenią rzeczywistą. $|\cdot|$ - określa normę w przestrzeni R^n.

W dalszych rozważaniach operować będziemy przestrzenią Hilberta $M_2(0,T)$ mierzalnych procesów stochastycznych rzędu drugiego z normą określoną w sposób następujący:

$$\|x(t,w)\|_{M_2(0,T)} := \left(\int_0^T E|x(t,w)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad 0 < T < \infty.$$

E oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej. Przez $L_2(0,T)$ oznaczymy przestrzeń Lebesgue'a funkcji całkowalnych z kwadratem na zbiorze $[0,T)$.

Dalej stale będziemy zakładać, że pole losowe g spełnia następujące warunki Caratheodory'ego w sensie średnim: g jest ciągłym odwzorowaniem względem x w przestrzeni Hilberta pól losowych rzędu drugiego, dla prawie wszystkich $t \in [0,\infty)$ i jest $\mathfrak{X} \cdot \sigma$ - mierzalne dla wszystkich $x \in R^n$ ($\mathfrak{X}$ - oznacza σ- ciało podzbiorów borelowskich w $[0,\infty)$.

Propozycja. Założymy, że są spełnione następujące założenia:

(i) istnieje nieujemna funkcja mierzalna $g_1(t) \in L_2(0,T)$ taka, że dla prawie wszystkich $t \in [0,T)$ i wszystkich $x(t,w) \in M_2(0,T)$

$$(E|g(t,x(t,w),w)|^2)^{1/2} \leq g_1(t) + \beta(E|x(t,w)|^2)^{1/2},$$

gdzie β - pewna stała dodatnia;

(ii) Jądro Fredholma h(t,s,w) jest istotnie ograniczone ze względu na $w \in \Omega$, istotne supremum $\|h(t,s,w)\|_\infty$ jest mierzalne na Δ_1 i spełnia warunek:

$$\|h\|^2 := \int_0^T \int_0^\infty (\|h(t,s,w)\|_\infty)^2 \, dsdt < \infty;$$

(iii) jądro Volterry k(t,s,w) jest istotnie ograniczone ze względu na $w \in \Omega$. Istotne supremum $\|k(t,s,w)\|_\infty$ jest mierzalne na Δ i spełnia warunek:

$$\|k\|^2 := \int_0^T \int_0^t (\|k(t,s,w)\|_\infty)^2 \, dsdt < \infty,$$

(iv) pole losowe f(t,x,w) spełnia w przestrzeni $M_2(0,T)$ (ε,η) - jednostajnie lokalny warunek Lipschitza, ponadto $f(t,0,w) = 0$ dla prawie każdego $t \in [0,T)$ i prawie wszędzie na Ω;

(v) $m := 1-|\lambda| \, \|k\|_\eta - |\gamma| \, \|h\| \, \beta > 0$;

(vi) $z(t,w) \in \overline{K(0,r)}$, $\overline{K} \subset M_2(0,T)$, $r := Rm - |\gamma| \|h\| \, \|g_1\| \, L_2(0,T) > 0$,

gdzie R - pewna stała dodatnia, którą zawsze można dobrać tak, aby $r > 0$.

Wówczas istnieje co najmniej jedno rozwiązanie równania (9), które zawiera się w kuli $\overline{K(0,R)} \subset M_2(0,T)$.

Dowód

Z założeń (i) i (ii) wynika, że operator Fredholma

$$F : (Fx)(t,w) := \int_0^\infty h(t,s,w)g(s,x(s,w),w)ds,$$

jest pełnociągły w $M_2(0,T)$ [7]. Z warunków (iii) i (iv) łatwo wnioskuje się, że operator V:

$$V : (Vx)(t,w) := \int_0^t k(t,s,w)f(s,x(s,w)w)ds,$$

jest dla $t \in (0,T)$ $(\mathcal{E},\eta)$ jednostajnie, lokalnie zbliżający w $M_2(0,T)$. Na podstawie (v) i (vi) wystarczy zauważyć, że $Fx+Vx+z \in \overline{K(0,R)}$ dla $x\in\overline{K(0,R)}$ czyli operator określony przez prawą stronę równania (9) przekształca kulę $\overline{K(0,R)}$ w siebie. To kończy dowód.

Uwagi końcowe

Rozważania zawarte w PROPOZYCJI uogólniają w sposób istotny pewne wyniki Tsokosa [4,6,8] i Padgett [4-6,8] osiągnięte w dziedzinie losowych równań całkowych Volterry i Fredholma.

LITERATURA

[1] Krasnosielskij M.A.: "Dwa zamieczanija o mietodie posliedowatielnych pribliżenij", Uspiehi Matiem. Nauk, X, N°1, 1955, 123-127.

[2] Krasnosielskij M.A.: "Topołogiczeskije mietody w tieorii nieliniejnych intiegralnych urawnienij", Gos.Izd.Tieh.-Tieor. Lit.,Moskwa 1956.

[3] Maurin K.: "Analiza - cz. I", PWN, Warszawa 1971.

[4] Milton J.S., Padgett W.J., Tsokos C.P.: "On the existence and uniqueness of a random solution to a perturbed integral equation of the Fredholm type", SIAM J.Appl.Math., Vol. 22, N°2, 1972, 194-208.

[5] Padgett W.J.: "On a random Volterra integral equation", Math. Syst. Theory, Vol. 7, N°2, 1973, 164-169.

[6] Padgett W.J., Tsokos C.P.: On a stochastic integral equation of the Fredholm type", Z. Warscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 23,1972,22-31.

[7] Skrzypczyk J.: "L_m^p-stabilność w sensie średnim nieliniowego stochastycznego równania całkowego", Zesz.Nauk.Pol.Śl., ser. Automatyka, N°25, Gliwice 1974.

[8] Tsokos C.P., Padgett W.J.: "Random integral equations with applications to stochastic systems", Lect.Not.Math. 233, Springer-Verlag, Berlin 1971.

ЗАМЕЧАНИЯ О МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В $\mathcal{E}$-ЦЕПНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р е з ю м е

Рассматривается операторное уравнение x=AxBx в замкнутом, ограниченном, компактном множестве T, полного, метрического $\mathcal{E}$-цепного пространства. Представляются теоремы о существовании решений этого операторного уравнения и их применение для решения интегрального уравнения вида Фредгольма.

ON THE APPROXIMATE SOLUTIONS OF OPERATOR EQUATIONS IN ε-CHAINABLE BANACH SPACES

S u m m a r y

The operator equation $Ax+Bx=x$ in a closed and bounded convex subset T of complete ε-chainable metric space has been considered. The theorems of the existence and uniqueness of a solution of the operator equation as above were given. The application of a perturbated integral equation of the Fredholm type has been presented without details.