ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Lesław Socha

ANALIZA STABILNOŚCI ZŁOŻONYCH, STOCHASTYCZNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono nowe kryteria asymptotycznej i eksponencjalnej stabilności z prawdopodobieństwem jeden dla pewnych klas ciągłych złożonych stochastycznych układów dynamicznych. Niektóre z podanych kryteriów zilustrowano przykładem.

1. Wstęp

Zagadnienie badania stabilności złożonych deterministycznych układów dynamicznych było dotychczas rozważane przez wielu autorów w pracach [3]-[10]. Rozszerzeniem wyników na złożone stochastycznie układy dynamiczne jest praca A.N. Michela [11], w której podano nowe kryteria stabilności stochastycznej złożonych stochastycznych układów dynamicznych. Niniejszy artykuł jest próbą uogólnienia tych kryteriów na złożone stochastyczne układy dynamiczne, w których występują stochastyczne sprzężenia pomiędzy podukładami. Na końcu pracy podano przykład ilustrujący przedstawione kryteria.

2. Podstawowe pojęcia, oznaczenia i definicje

R^n - n wymiarowa przestrzeń Euklidesa

$|\cdot|$ - norma w R^n

$x^T = (x_1,\dots,x_n)$ - transpozycja wektora $x \in R^n$

$\lambda(A)$ - wartość własna macierzy kwadratowej A

$\|D\| = \sqrt{\lambda_{max}(D^TD)}$ - norma macierzy prostokątnej

$T = \{t: o < t \infty\}$

I - macierz identycznościowa.

Będziemy rozważać układy opisane formułą różniczkową Ito

$$dx = f(x)\,dt + \sigma(x)\,dz, \tag{1}$$

gdzie

$x \in R^n$, $t \in T$, $f: R^n \to R^n$, $\sigma: R^n \to R^{n \cdot m}$,

$\{z_t, t \in T\}$ jest m- wymiarowym procesem Wienera.

Zakłada się, że $f(\cdot)$ i $\sigma(\cdot)$ spełniają wszystkie warunki potrzebne do zapewnienia dla dowolnego $x_0 = x$ istnienia i jednoznaczności rozważania $\{x_t, t \in T\}$ z prawdopodobieństwem jeden (z p 1). Zagadnienie to zostało dokładnie przedstawione np. w książkach Chaśmińskiego [1] i Kushnera [2]. Zakłada się, że $\{x_t = 0, t \in T\}$ jest jedynym punktem równowagi (1).

Definicja 1

Rozwiązanie $x_t = 0$ jest stabilne (z p 1) wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{\delta > 0} \; \forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{r(\varepsilon,\delta) < 0} \; \|x_0\| < r(\varepsilon,\delta) \Rightarrow P_{x_0}\left\{ \sup_{\infty > t \geq 0} |x_t| > \varepsilon \right\} < \delta .$$

Definicja 2

Rozwiązanie $x_t = 0$ jest asymptotycznie stabilne (z p 1) wtedy i tylko wtedy jeśli jest stabilny (z p 1) i $x_t \to 0$ (z p 1) dla wszystkich $x_0 = x$ z pewnego otoczenia R. Jeśli R jest całą przestrzenią mówimy, że układ jest asymptotycznie zupełnie stabilny (z p 1).

Definicja 3

Rozwiązanie $x_t = 0$ jest eksponencjalnie stabilne (z p 1) wtedy i tylko wtedy gdy jest stabilne (z p 1) (Def. 1) i

$$\forall_{T < \infty} \; P_x\left\{ \sup_{\infty > t > T} |x_t| > \varepsilon \right\} \leq K_e e^{-\alpha T},$$

gdzie $K_0 < \infty$ i $\alpha > 0$.

Do badania stabilności stochastycznej wykorzystuje się funkcję Lapunowa $V: R^n \to R^1$. Od tego miejsca będziemy zakładać, że wszystkie funkcje Lapunowa V są ograniczone na zbiorze.

$$Q_m = \left\{ x \in R^n : V(x) < m, \quad m \text{ stała dodatnia} \right\}. \tag{2}$$

Ponadto zakłada się, że V posiada ciągłe i ograniczone pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ze względu na x na zbiorze Q_m. Przy badaniu stabilności stochastycznej żąda się, aby $V(x)$ należała do dziedziny infinitezymalnego operatora $\tilde{A}_{Q_m}$, który dla równania (1) ma postać:

$$\mathcal{L}_{(1)} = \sum_i f_i(x)^T \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}, \tag{3}$$

gdzie $S_{ij}(x)$ jest macierzą $S_{ij}(x) = \sigma(x) \cdot \sigma(x)^T$.

Będziemy rozważać następujące złożone stochastyczne układy dynamiczne.

$$dw_i = f_i(w_i)dt + \sigma_i(w_i)dz_i + q_i(w_1,\dots,w_l)dt + \sum_{j=1}^{l} b_{ij}(w_1,\dots,w_l)d\,\xi_j, \tag{4}$$

gdzie

$$w_i \in R^{n_i}, \quad f_i : R^{n_i} \to R^{n_i}, \quad \sigma_i : R^{n_i} \to R^{n_i} \cdot {}^{m_i},$$

$$g_i : R^{n_1} \cdot R^{n_2} \cdot \ldots \cdot R^{n_l} \to R^{n_i}, \quad b_{ij} : R^{n_1} \cdot \ldots \cdot R^{n_l} \to R^{n_i r_j}$$

$$f(w_i) = 0 = g(w_i) \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad w_i = 0,$$

$\{z_{i_t},\ t \in T\}$ jest m_i wymiarowym procesem Wienera (znormalizowanym)

$\{\xi_{j_t},\ t \in T\}$ jest r_i wymiarowym procesem Wienera (znormalizowanym).

Oznaczając

$$\sum_{j=1}^{l} n_j = n, \quad \sum_{j=1}^{l} m_j = m, \quad \sum_{i=1}^{l} r_j = r$$

$$f^T(x) = (f_1^T(w_1),\dots,f_l^T(w_l)), \qquad z^T = (z_2^T,\dots,z_1^T)$$

$$g^T(x) = \left[g_1^T(w_1,\dots,w_l),\dots,g_l^T(w_1,\dots,w_l)\right] \triangleq \left[g_1^T(x),\dots,g_l^T(x)\right]$$

$$\sigma(x) = \begin{bmatrix} \sigma_1(w_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(w_2) & \\ 0 & & \sigma_l(w_l) \end{bmatrix}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_{11}(w_1\dots w_l) & \dots & b_{1l}(w_1\dots w_l) \\ & & \\ b_{l1}(w_1\dots w_l) & \dots & b_{ll}(w_1\dots w_l) \end{bmatrix}.$$

Układ (4) możemy zapisać w postaci:

$$dx = f(x)dt + \sigma(x)dz + g(x)\,dt + B(x)\,d\xi \triangleq F(x)dt + \sigma^{*}(x)dz^{*}, \tag{5}$$

gdzie:

$$f: R^{n} \longrightarrow R^{n}, \quad \sigma: R^{n} \longrightarrow R^{n\cdot m}, \quad q: R^{n} \longrightarrow R^{n}, \quad B: R^{n} \longrightarrow R^{m\cdot r}$$

$$\sigma^{*}(x) = \begin{bmatrix} \sigma(x) \\ \cdots\cdots \\ B(x) \end{bmatrix}, \qquad z^{*} = \begin{bmatrix} z \\ \cdots\cdots \\ \xi \end{bmatrix}.$$

Układ (5) posiadający tę samą formę co (1) nazywamy złożonym stochastycznym układem dynamicznym. Może on być traktowany jako l izolowanych S_i podukładów powiązanych sprzężeniami, na które działają zakłócenia niezależne od zakłóceń działających na podukłady. Układy S_i mają postać:

$$S_i : dw_i = f_i(w_i)dt + \sigma_i(w_i)dz_i. \tag{6}$$

Jedyne rozwiązania (z p 1) układu (6) oznaczmy przez

$\left\{w_{i_t}, \ t \in T\right\}$ z warunkiem początkowym $w_{i_0} = w_i$.

W pracy będziemy rozważać różne przypadki złożonych układów dynamicznych.

$$dw_i = f_i(w_i)dt + \sigma_i(w_i)dz_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{l} C_{ij}\, w_i\, dt + B_i \tag{7}$$

$$dw_i = f_i(w_i)dt + \sigma_i(w_i)dz_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{l} C_{ij}(x)w_j\, dt + B_i \tag{8}$$

$$dw_i = f_i(w_i)dt + \sigma_i(w_i)dz_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{l} A_{ij}\, f_j \cdot w_j\, dt + B_i \tag{9}$$

$$dw_i = f_i(w_i)dt + \sigma_i(w_i)dz_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{l} q_{ij}\, w_j\, dt + B_i, \tag{10}$$

gdzie B_i może przyjmować następujące postacie:

$$B_i^a = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{l} b_{ij}\, w_j\, d\,\hat{\xi}_j \qquad B_i^c = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l} D_{ij}\, f_i(w_j) d\,\hat{\xi}_j$$

$$B_i^b = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{l} b_{ij}(x)\, w_j\, d\hat{\xi}_j \qquad B_i^d = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{l} b_{ij}(w_j) d\,\hat{\xi}_j$$

C_{ij}, A_{ij}, D_{ij}, b_{ij} są macierzami stałymi

$$b_{ij}(w_j) : R^{n_j} \longrightarrow R^{n_i}, \quad B_{ij}(w_j) : R^{n_j} \longrightarrow R^{n_i}, \quad C_{ij}(x) : R^{n} \longrightarrow R^{n_i n_j}.$$

Jeśli wszystkie $B_i \equiv 0$ wtedy (4) i (7) - (10) redukują się do złożonych stochastycznych układów dynamicznych przedstawionych w pracy Michela (11). Jeśli wszystkie i $w_i = 0$ i $B_i = 0$ wtedy (4) i (7) - (10) redukują się do złożonych deterministycznych układów dynamicznych przedstawionych w pracach [3]- [10].
Ilość układów, które można uzyskać dzięki różnym kombinacjom układów (7)-(10) i B_i^a - B_i^d wynosi 16. Dlatego będziemy rozważać jedynie układy(7a), (8b), (9c), (10d). Ten zapis oznacza na przykład w przypadku układu 7a następujące wyrażenie

$$dw_i = f_i(w_i)dt + \sigma_i(w_i)dz_i + \sum_{j=1}^{l} C_{ij}(w_j)dt + B_i^a. \tag{7a}$$

Podamy jeszcze dwie definicje, którymi będziemy się posługiwać przy formułowaniu twierdzeń.

Definicja 4

Izolowany podukład (6) spełnia własności A jeśli istnieją $V_i : R^{n_i} \longrightarrow R^1$ w obszarze działania $\tilde{A}_{Q_{mj}} = \alpha_{(6)}$ dla dostatecznie dużych $m_i > 0$, oraz funkcje ψ_{i1}, ψ_{i2}, ψ_{i3} spełniające warunki.

1. $\psi_{i1}(|w_i|) \leqslant V_i(w_i) \leqslant \psi_{i2}(|w_i|)$

2. $\alpha_{(6)} V_i(w_i) \leqslant -\ \psi_{i3}(|w_i|)$

dla wszystkich $w_i \in Q_{m_i}$ i dostatecznie dużych $m_i > 0$.

II. Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1

Rozwiązanie $x_t = 0$ złożonego stochastycznego układu dynamicznego (4) jest asymptotycznie zupełnie stabilnie (z p 1) jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Każdy izolowany podukład (6) spełnia własność A.
2. Dla każdego iloczynu skalarnego $\nabla V_i(w_i)^T g_i(x)$ $i=1,\dots,l$ istnieją funkcje ciągłe o wartościach rzeczywistych $a_{ij}(x)$ takie, że
$$\nabla V_i(w_i)^T g_i(x) \leqslant \left[\psi_{i3}(|w_i|)\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{l} a^*_{ij}(x)\left[\psi_{j3}(|w_j|)\right]^{\frac{1}{2}}$$
zachodzi dla wszystkich $w_i \in R^{n_i}$, $w_j \in R^{n_j}$, $x \in R^n$.
3. Istnieją funkcje ciągłe o wartościach rzeczywistych $a_{ij}(x)$ takie, że
$$|\ddot{V}_i(w_i)| \sum_{j=1}^{l} b^2_{ij}(x) \leqslant \sum_{j=1}^{l} a^*_{ij}(x) \cdot \sum_{j=1}^{l} \psi_{j3}(|w_j|).$$
4. Istnieje wektor l - wymiarowy $\alpha^T = (\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, $\alpha_i > 0$ $i=1,\dots,l$ i $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $x \in R^n$ macierz $(S + \varepsilon I)$ jest ujemnie określona, gdzie $S = [S_{ij}]$ jest zdefiniowana następująco:
$$S_{ij} = \begin{cases} -\alpha_i + \alpha_i\left(a_{ii}(x) + \sum\limits_{ij}^{l} a^*_{ij}(x)\right) & \text{jeśli } i=j \\ \left[\alpha_i - a_{ij}(x) + \alpha_j\, a_{ji}(x)\right]\cdot\frac{1}{2} & \text{jeśli } i\neq j \end{cases}$$

Założenie 2 i 3 może być spełnione np. gdy V_i oraz $\psi_{i3}(|w_i|)$ są formami kwadratowymi wtedy $a_{ij}(x) = \|C_{ij}\|$, $a^*_{ij}(x) = \|b_{ij}\|^2$.

Wniosek:

Rozwiązanie $x_t = 0$ złożonego stochastycznego układu dynamicznego (8b) jest eksponencjalnie stabilne (z p 1) jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Każdy izolowany podukład (6) spełnia własność B

2. Istnieje wektor l-wymiarowy $\alpha^T = (\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,\dots,l$ i $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $\alpha \in R^n$ macierz $(S + \varepsilon I)$ jest ujemnie określona gdzie $S = [s_{ij}]$ jest zdefiniowana następująco:

$$s_{ij} = \begin{cases} -\alpha_i C_{i3} + \alpha_i C_{i4} \|C_{ij}(x)\| + \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i C_{i5} \sum\limits_{j=1}^{l} \|b_{ij}(x)\|^2 & \text{jeśli } i=j \\ \frac{1}{2}\left[\alpha_i C_{i4} \|C_{ij}(x)\| + \alpha_j C_{j4} \|C_{ji}(x)\|\right. & \text{jeśli } i\neq j \end{cases},$$

gdzie

$$C_{ij}(x) = \sqrt{\lambda\max\left[C_{ij}^T(x)\, C_{ij}(x)\right]}, \quad \|b_{ij}(x)\| = \max = \sqrt{\lambda\max\left[b_{ij}^T(x) b_{ij}(x)\right]}.$$

Twierdzenie 2

Rozwiązanie $x_t = 0$ złożonego stochastycznego układu dynamicznego (9c) jest asymptotycznie zupełnie stabilnie (z p 1), jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Każdy izolowany podukład (6) spełnia własność A.
2. Dla każdego izolowanego podukładu (6) istnieją dodatnie stałe K_{i1}, K_{i2}, K_{i3} takie, że warunki:

$$\alpha_{(6)} V_i(w_i) \leqslant -K_{i1} |f_i(w_i)|^2$$

$$V_i(w_i) \leqslant K_{i2} |f_i(w_i)|$$

$$|\ddot{V}(w_i)| \leqslant K_{i3}$$

są spełnione dla wszystkich $w_i \in Q_{m_i}$ i wszystkich $m_i > 0$.

3. Istnieje wektor l-wymiarowy $\alpha^T = (\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, $\alpha_i > 0$, $i=1,\dots,l$ takie, że macierz $S = [s_{ij}]$ jest ujemnie określona.

$$s_{ij} = \begin{cases} -\alpha_i K_{i1} + \sum\limits_{i=1}^{l} \frac{1}{2}\alpha_i K_{i3} \sum\limits_{j=1}^{l} \|D_{ij}\|^2 & \text{jeśli } j=i \\ \frac{1}{2}\left[\alpha_i K_{i2} \|A_{ij}\| + \alpha_j K_{j2} \|A_{ji}\|\right] & \text{jeśli } j\neq i \end{cases},$$

gdzie:

$$\|A_{ij}\| = \sup_{f_j(w_j) \neq 0} \frac{\|A_{ij}\, f_j(w_j)\|}{\|f_j(w_j)\|}$$

$$\|D_{ij}\| = \sup_{f_j(w_j) \neq 0} \frac{\|D_{ij}\, f_j(w_j)\|}{\|f_j(w_j)\|}.$$

Twierdzenie 3

Rozwiązanie $x_t = 0$ złożonego stochastycznego układu dynamicznego (10d) jest eksponencjalnie stabilne (z p 1) jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Każdy izolowany podukład (6) spełnia własność B
2. Dla każdego $i,j=1,\ldots,l$ istnieją stałe dodatnie K_{ij}, $\varkappa_{ij}$ takie, że

$$|g_{ij}(w_j)| \leq K_{ij} \;\; |w_j|$$

$$|b_{ij}(w_j)| \leq \varkappa_{ij} \;\; |w_j| \qquad \forall_{w_j \in R^{n_j}}$$

3. Istnieje wektor l-wymiarowy $\alpha^T = (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$, $\alpha_i > 0$ taki, że macierz $S = [s_{ij}]$ jest ujemnie określona.

$$s_{ij} = \begin{cases} -\alpha_i\, c_{i3} + \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i\, c_{i5} \sum\limits_{K=1}^{l} \varkappa_{iK}^2 & \text{jeśli } i=j \\ \frac{1}{2}\left[\alpha_i\, c_{i4}\, K_{ij} + \alpha_j\, c_{j4}\, K_{ji}\right] & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Uwaga

Warunki dla eksponencjalnej stabilności (z p 1) złożonych stochastycznych układów dynamicznych (7a) wynikają z założeń tw. 3 jeśli K_{ij} zastąpić przez C_{ij} oraz $\varkappa_{ij}$ przez b_{ij} i jeśli założenie 2 jest spełnione. Dowody twierdzeń 1,2,3 i wniosku oparte są na tej samej idei i przebiegają bardzo podobnie. Dlatego podamy tutaj tylko dowód twierdzenia 3.

Dowód twierdzenia 3

Weźmy funkcję Lapunowa $V(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i V_i(w_i)$, $\alpha_i > 0$, $(i=1,\ldots,l)$ oraz

zdefiniujemy

$$Q_m = \left\{ x \in R^n : V(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i V_i(w_i) < m \right.$$

dla dostatecznie dużego $m > 0$.
Jeśli $x \in Q_m$ wtedy $V_i(w_i) < \frac{m}{\alpha} \triangleq m_i$ oraz

$$Q_m \subset \left\{ x: V_i(w_i) < m_i, \quad i=1,\dots,l \right\}.$$

Ponieważ każdy podukład (6) spełnia własności B stąd wynika, że

$$\min_i \left\{ \alpha_i C_{i1} \right\} |x|^2 \leqslant V(x) \leqslant \max_i \left\{ \alpha_i C_{i2} \right\} |X|^2, \quad x \in Q_m, \tag{12}$$

dla m dostatecznie dużego.
Oszacujemy teraz wielkość $\alpha_{(10)} V(x)$ i pokażemy, że jest ona mniejsza od pewnej ujemnej formy kwadratowej

$$\mathcal{L}_{(10)} V(x) = \mathcal{L}_{(10)} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i V_i(w_i) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \ \alpha_{(6)} V_i(w_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \left\{ \left[\nabla V_i(w_j) \right]^T \sum_{j=1}^{l} g_{ij}(w_j) + \frac{1}{2} \ddot{V}_i(w_i) \sum_{K=1}^{l} b_{iK}(w_K) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\ b_{jK}(w_K) \right\}. \tag{13}$$

$$\mathcal{L}_{(10)} V(x) \leqslant \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \left\{ - C_{i3} |w_i|^2 + C_{i4} |w_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l} K_{ij} |w_j| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left| \ddot{V}_i(w_j) \right| \sum_{K=1}^{l} \varkappa_{iK}^2 \ w_K^2 \right\}$$

$$\mathcal{L}_{(10)} V(x) \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \left\{ - C_{i3} |w_i|^2 + C_{i4} |w_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{l} K_{ij} |w_j| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} C_{i5} \sum_{K=1}^{l} \varkappa_{iK}^2 \ |U|^2 \right\},$$

gdzie $U^T = (|w_1|, \dots, |w_l|)$:

stąd

$$\mathcal{L}_{(10)} V(x) \leqslant u^T Q\, u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, C_{i5} \sum_{k=1}^{l} \varkappa_{ik}^2\ |U|^2, \tag{14}$$

gdzie $Q = q_{ij}$ jest macierzą określoną wzorem

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha_i\ C_{i3} & \text{dla } i=j \\ \alpha_i\ C_{i4}\, K_{ij} & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Następnie:

$$\mathcal{L}_{(10)} V(x) \leqslant u^T \left[(Q+Q^T)/2\right] u + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\ C_{i5} \sum_{K=1}^{l} \varkappa_{iK}^2\right) |U|^2$$

a stąd wynika, już bezpośrednio teza twierdzenia 3.

III. Przykład

$$dw_{wi} = -\varrho_i\, w_i\, dt + \sigma_i(w_i)\, dz_i + dt \quad i=1,2,3,4 \tag{15}$$

$$d\Theta = -r\Theta\, dt - f(\Theta)dt + \sigma_\Theta \cdot \Theta dz_\Theta + \sum_{i=1}^{4} \beta_i\, w_i\, dt + \sum_{j=1}^{4} b_{\Theta j}\, w_j\, d\xi_j,$$

gdzie $\varrho_i > 0$, $\sigma_i > 0$, $r > 0$, $\sigma_\Theta > 0$, β_i, $b_{\Theta j}$ są stałymi, $\{z_{it}, t \in T\}$, $\{z_\Theta, \Theta < T\}$, $\{\xi_{jt}, t \in T\}$ są jednowymiarowymi procesami Wienera, $w_i \in R^1$ $\Theta \in R^1$ $f(\Theta)$ jest funkcją rzeczywistą jednej zmiennej posiadającą następujące właściwości:

1. f - jest ciągła $\forall -\infty < \Theta < \infty$
2. $f(\Theta) = 0 \iff \Theta = 0$
3. $0 < f(\Theta) \cdot \Theta \leqslant M\Theta^2 \quad \forall\ \Theta \neq 0.$

Złożony stochastyczny układ dynamiczny może być traktowany jako sprzężenie dwóch podukładów dynamicznych S_1 i S_2

$$S_1 : dw_i = \varrho_i\, w_i\, dt + \sigma_i\, w_i\, dz_i \quad i=1,2,3,4 \tag{16}$$

$$S_2 : d\Theta = -r\Theta\, dt - f(\Theta)dt + \sigma_\Theta \Theta dz_\Theta. \tag{17}$$

Macierze sprzężeń mają postać

$$C_{12}^T = (1,\ 1,\ 1,\ 1) \qquad C_{21} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)$$

$$b_{12}^T = (0,\ 0,\ 0,\ 0) \qquad b_{21} = (b_{\Theta 1},\ b_{\Theta 2},\ b_{\Theta 3},\ b_{\Theta 4}).$$

Układ (15) jest szczególnym przypadkiem układu (7a).

Załóżmy, że $(-2\varrho_i + \sigma_i^2) < 0, \quad i=1,2,3,4$ i $(-2r + \sigma_\Theta^2) < 0.$ (18)

Są to warunki stabilności dla podsystemów.

Dla podukładu (16) weźmy funkcję Lapunowa postaci:

$$V_1(w) = w^T w = |w|^2,$$

gdzie $w^T = (w_1\ w_2\ w_3\ w_4)$.

Wówczas V_1 należy do dziedziny operatora $A_{Q_{m_1}}$ dla dostatecznie dużego $m_1 > 0$ i otrzymujemy:

$$A_{Q_{m_1}} V_1 = \mathcal{L}_{(16)} V_1(w) \leqslant \max_i (-2\varrho_i + \sigma_i^2) |w|^2$$

dla każdego $w \in Q_{m_1} = \left\{ w: |w|^2 < m_1^2 \right\}$.

Również: $\left|\nabla V\ V_1(w)\right| \leqslant 2|w| = C_{14}\,|w|$

$$\left|\ddot{V}_1(w)\right| \leqslant 4 = C_{15}.$$

Podobnie dla podukładu (17) weźmy funkcję Lapunowa postaci:

$$V_2(\Theta) = \Theta^2.$$

Wówczas V_2 należy do dziedziny operatora $A_{Q_{m_2}}$ dla dostatecznie dużego $m_2 > 0$ i otrzymujemy:

$$A_{Q_{m_2}} V_2 = \mathcal{L}_{(17)} V_2(\Theta) \leqslant (-2r + \sigma_\Theta^2)\,\Theta^2$$

dla każdego $\Theta < Q_{m_2} = \left\{ \Theta: \Theta^2 < m_2^2 \right\}$.

Również:

$$|\nabla V_2(\Theta)| \leqslant 2\Theta = c_{24}\Theta$$

$$|\ddot{V}_2(\Theta)| \leqslant 2 = c_{25}.$$

Zauważmy, że $\|C_{12}\| = 2$, $\|C_{21}\| = (\sum_{i=1}^{4} \beta_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sum_{K=1}^{2} b_{1K}^2 = 0$

$$\sum_{K=1}^{2} b_{2K}^2 = \sum_{i=1}^{4} b_{\Theta i}^2,$$

podstawiacją $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ i $\alpha_2 = \frac{1}{2\left[\sum_{i=1}^{4} \beta_i^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ i korzystając z tw. 3 otrzymujemy macierz

$$S = \begin{bmatrix} \max\limits_i (-2\varrho_i + \sigma_i^2)/4 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sum\limits_{i=1}^{4} b_{\Theta i}^2, & 1 \\ 1, & \left[(-2r + \sigma_\Theta^2) + \frac{1}{2} \cdot 2 \sum\limits_{i=1}^{4} b_{\Theta i}^2\right] / 2 . \left[\sum\limits_{i=1}^{4} \beta_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

stąd wynika, że rozwiązanie trywialne układu (15) jest eksponecjalnie stabilne (z p 1) jeśli macierz S jest ujemnie określona.

$$\sum_{i=1}^{4} \zeta_i^2 < 1 \qquad \zeta_i = \frac{8\beta_i}{\left[\max\limits_i (-2\varrho_i + \sigma_i^2) + \sum\limits_{i=1}^{4} b_{\Theta i}\right]\left[(-2r + \sigma_\Theta^2) + \sum\limits_{i=1}^{4} b_{\Theta i}^2\right]}.$$

Uwagi końcowe

Przedstawione w pracy wyniki są pewnym uogólnieniem wyników zawartych w pracy A.N. Michela [11].

W pracy przedstawiono jedynie analizę układów (7a), (8b), (9c) i (10d), bowiem dla pozostałych przypadków np. (7b), (9a) itp. analiza jest bardzo podobna. Celowym wydaje się jednak przebadanie złożonych stochastycznych układów dynamicznych, na które działają procesy Poissona.

LITERATURA

[1] Chaśmiński R.Z.: Ustojcziwostsistiem differiencjalnych urawnienij pri słuczajnych wozmuszczeniach ich paramietrow, Nauka, Moskwa 1969.

[2] Kushner H.: Stochastic Stability and Control, Nowy York, Academic Press, 1967.

[3] Bailey F.N.: The application of Lyapunov's second method to interconnected systems, J. SIAM Control, ser. A, vol 3.

[4] Piontkowski A.A.; and Rutkowskaja L.D.: Investigation of certain stability theory by the vector Lyapunov function method, Automat. Remote Contr, vol.10, 1967.

[5] Thompson,W.E.: Exponential stability of interconnected systems, IEEE Trans.Automat.Contr. (Coresp.) vol.AC-1., Aug. 1970.

[6] Michel A.N., Porter D.W.: Stability analysis of composite systems, IEEE Trans.Automat.Contr. (Short Paper), vol. AC-17, Apr. 1972.

[7] Araki M. and Kondo B.: Stability and transient behavior of composite nonlinear systems, IEEE Trans. Automat.Contr., vol.AC-17 Aug 1972.

[8] Grujić Lj.T., Siljak D.D.: Asymptotic stability and instability of large-scale systems, IEEE Trans.Automat.Contr. vol. AC-18, Dec. 1973.

[9] Michel A.N.: Stability analysis of interconnected systems, J. SIAM Contr.ser. A, vol. 12, Aug. 1974.

[10] Michel A.N.: Stability and trajectory behavior of composite systems, in proc. 1974 IEEE Int.Symp.Circuits and Systems, San Francisko, Calif. 1974.

[11] Michel A.N.: Stability Analisis of Stochastic Composite systems, IEEE Trans.Automat.Contr., vol.AC-20, Apr. 1975.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЖНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе представляются новые результаты асимптотической и экспоненциальной устойчивости с вероятностью один для некоторых классов непрерывных стохастических сложных систем. Приводятся примеры.

STABILITY ANALYSIS OF STOCHASTIC COMPOSITE DYNAMIC SYSTEMS

S u m m a r y

New results for the asymptotic stability and exponential stability with probability one of several classes of continuous parameter stochastic composite systems have been established. The results have been applied to specific examples.