ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Janusz Szopa

CHARAKTERYSTYKI STOCHASTYCZNE UKŁADÓW OPISANYCH STOCHASTYCZNYMI RÓWNANIAMI CAŁKOWYMI VOLTERRY II RODZAJU I ICH ZASTOSOWANIE DO STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Streszczenie: W pracy uogólniono wyniki otrzymane w [7]. Wyprowadzono wzory na funkcję korelacyjną rzędu r dla stochastycznego równania całkowego Volterry II rodzaju. Otrzymane wyniki zastosowano do badania stochastycznych równań różniczkowych n-tego rzędu ze zmiennymi współczynnikami i stochastycznym wymuszeniem. Oszacowano błędy jakie mogą powstać wskutek rozważania skończonej ilości wyrazów w rezolwencie.

Rozważać będziemy stochastyczne równanie Volterry II rodzaju, postaci ([1]);

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t K(t,u)\, x(u,\omega)\, du, \tag{1}$$

gdzie:

(i) $t \in [0,T]$, $T<\infty$;

(ii) $\omega \in \Omega$; $<\Omega, \beta, \mu>$ – przestrzeń probabilistyczna;

(iii) $x: [0,T] \cdot \Omega \to R$ – nieznany proces stochastyczny;

(iv) $h: [0,T] \cdot \Omega \to R$ – znany mierzalny proces stochastyczny;

(v) $K: [0,T] \cdot [0,T] \to R$ – jądro – funkcja mierzalna wg Lebesgue'a oraz $\underset{0\leqslant u\leqslant t\leqslant T}{\forall} |K(t,u)| \leqslant B(t) \wedge \underset{B:R\to R}{} \int_0^T [B(t)]^m\, dt < \infty$ dla $m=1,2,\ldots$

(vi) λ – stała liczba rzeczywista.

Wprowadzamy przestrzeń Banacha $C^m (m \geqslant 1)$ wszystkich funkcji mierzalnych $x: [0,T] \cdot \Omega \to R$ takich, że

$$\sup_{t\in[0,T]} \|x(t,\omega)\|_m < \infty,$$

gdzie:

$$\|\text{——}\|_m \stackrel{df}{=} \left\{ \int_{\Omega} |\text{———}|^m \, d\mu \, (\omega) \right\}^{\frac{1}{m}} .$$

Normę w przestrzeni C^m definiujemy następująco:

$$\|x\|_{C^m} \stackrel{df}{=} \sup_{t \in [0,T]} \left\{ \|x(t,\omega)\|_m \right\} .$$

Równanie (1) zapisane za pomocą rezolwenty ma postać:

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda \int_0^t R(t,u,\lambda) \, h(u,\omega) du. \tag{2}$$

Dla i=1,...,r tworzymy wyrażenia (wykorzystując tw. Fubiniego):

$$x(t_i,\omega) - Ex(t_i,\omega) = h(t_i,\omega) - E\,h\,(t_i,\omega) + \lambda \int_0^{t_i} R(t_i,u_i,\lambda) \cdot$$

$$\cdot \left[h(u_i,\omega) - Eh(u_i,\omega) \right] du_i .$$

Wprowadzając pomocnicze oznaczenia:

$$A(t_i,\omega) \stackrel{df}{=} h(t_i,\omega) - Eh(t_i,\omega); \tag{2a}$$

$$B(t_i,\omega) \stackrel{df}{=} \lambda \int_0^{t_i} R(t_i, u_i,\lambda) \cdot \left[h(u_i,\omega) - Eh(u_i,\omega) \right] du_i ,$$

funkcja korelacji rzędu r dla równania Volterry przyjmie kształt:

$$K_x(t_1,\dots,t_r) \stackrel{df}{=} E\left\{ \left[x(t_1,\omega) - Ex(t_1,\omega) \right] \dots \left[x(t_r,\omega) - Ex(t_r,\omega) \right] \right\} =$$

$$= E\left\{ A(t_1,\omega) \dots A(t_r,\omega) \right\} + E\left\{ A(t_1,\omega) \dots A(t_{r-1},\omega) \cdot B(t_r,\omega) \right\} + \dots +$$

$$E\left\{ B(t_1,\omega) \cdot A(t_2,\omega) \dots A(t_r,\omega) \right\} + E\left\{ A(t_1,\omega) \dots A(t_{r-2},\omega) \cdot B(t_{r-1},\omega) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot B(t_r,\omega) \right\} + E\left\{ A(t_1,\omega) \dots B(t_{r-2},\omega) \cdot A(t_{r-1},\omega) \cdot B(t_r,\omega) \right\} +$$

$$+ \dots + E\left\{ B(t_1,\omega) \dots B(t_r,\omega) \right\} . \tag{2b}$$

(Dla $r=2$ otrzymujemy wzór na funkcję korelacji procesu $x(t,\omega)$ taki sam jak w [7]).
Wzór (2b) wykorzystamy do badania funkcji korelacji stochastycznego równania różniczkowego postaci:

$$a_n(t)\frac{d^n y(t,\omega)}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y(t,\omega)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1(t)\cdot\frac{dy(t,\omega)}{dt}+$$

$$+a_0(t)\,y(t,\omega) = P(t,\omega), \tag{3}$$

gdzie $y(t,\omega)$ i $P(t,\omega)$ są rzeczywistymi, mierzalnymi procesami stochastycznymi, $a_i(t)$ dla $i=0,1,\ldots,n$ są nielosowymi rzeczywistymi funkcjami i $t\in[0,T]$. W powyższym równaniu pochodne stochastyczne i znak równości są rozumiane wg średniej rzędu m ([1], [4], [6]). Dla równania (3) założymy znajomość warunków początkowych:

$$\text{dla}\quad t=0\quad y(0,\omega)=y_0,\quad \frac{dy(0,\omega)}{dt}=y_0^{(1)},\ldots,\ \frac{d^{n-1}y(0,\omega)}{dt^{n-1}}=y_0^{(n-1)}.$$

Przy założeniu $\bigwedge_t a_n(t)\neq 0$ (poza zbiorem o mierze Lebesgue'a równej zero) można (3) przekształcić do stochastycznego równania całkowego Volterry II-go rodzaju.
Niech ([2])

$$a_n(t)\frac{d^n y(t,\omega)}{dt^n}\stackrel{df}{=}x(t,\omega), \tag{4}$$

wtedy:

$$\frac{d^{n-1}y(t,\omega)}{dt^{n-1}}-y_0^{(n-1)}=\int_0^t\frac{x(t,\omega)}{a_n(t)}dt, \tag{4a}$$

$$\frac{d^{n-k}y(t,\omega)}{dt^{n-k}}-y_0^{(n-k)}-y_0^{(n-k+1)}\cdot t-\ldots-y_0^{(n-1)}\cdot\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\underbrace{\int_0^t\cdots\int_0^t}_{k}\frac{x(t,\omega)}{a_n(t)}dt^k=\int_0^t\frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{x(u,\omega)}{a_n(u)}du \tag{4b}$$

$$y(t,\omega)-y_0-y_0^{(1)}\cdot t-\ldots-y_0^{(n-1)}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=$$

$$=\underbrace{\int_0^t\cdots\int_0^t}_{n}\frac{x(t,\omega)}{a_n(t)}dt^n=\int_0^t\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{x(u,\omega)}{a_n(u)}du. \tag{4c}$$

Na podstawie powyższych wzorów rozpatrywane równanie (3) w postaci równania całkowego ma kształt:

$$x(t,\omega) + a_{n-1}(t)\cdot\left[\int_0^t \frac{x(u,\omega)}{a_n(u)}\,du + y_0^{(n-1)}\right] + \ldots + a_{n-k}(t)\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^t \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{x(u,\omega)}{a_n(u)}du + y_0^{(n-k)} + y_0^{(n-k+1)}\cdot t + \ldots + y_0^{(n-1)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right] + \ldots + a_0(t)\cdot$$

$$\left[\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{x(u,\omega)}{a_n(u)}du + y_0 + y_0^{(1)}\cdot t + \ldots + y_0^{(n-1)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right] = P(t,\omega), \tag{5}$$

a po uporządkowaniu:

$$x(t,\omega) = P(t,\omega) - \left\{a_{n-1}(t)\cdot y_0^{(n-1)} + \ldots + a_{n-k}(t)\cdot\left[y_0^{(n-k)} + \right.\right.$$

$$+ y_0^{(n-k+1)}\cdot t + \ldots + y_0^{(n-1)}\cdot\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right] + \ldots + a_0(t)\cdot\left[y_0 + y_0^{(1)}t + \ldots +\right.$$

$$\left.\left. y_0^{(n-1)}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]\right\} - \int_0^t \left[a_{n-1}(t) + \ldots + a_{n-k}(t)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + a_0(t)\cdot\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\cdot\frac{x(u,\omega)}{a_n(u)}\,du. \tag{6}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$h(t,\omega) \overset{\mathrm{df}}{=} P(t,\omega) - \{\ldots\}; \quad \lambda = -1;$$

$$K(t,u) = \left[a_{n-1}(t) + \ldots + a_{n-k}(t)\cdot\frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} + a_0(t)\cdot\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\cdot\frac{1}{a_n(u)} \tag{7}$$

mamy równanie (1).

Obecnie będziemy badać probabilistyczne charakterystyki procesu $y(t,\omega)$. Wg (4c) wartość średnia ma postać:

$$E\, y(t,\omega) = Ey_o + Ey_o^{(1)} \cdot t + \ldots + Ey_o^{(n-1)} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{Ex(u,\omega)}{a_n(u)}\, du \tag{9}$$

dla losowych warunków początkowych oraz:

$$Ey(t,\omega) = y_o + y_o^{(1)} \cdot t + \ldots + y_o^{(n-1)} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{Ex(u,\omega)}{a_n(u)}\, du \tag{10}$$

dla zdeterminowanych warunków początkowych. Dalej będziemy rozważać tylko zdeterminowane warunki początkowe. Wg (4c) i (10):

$$y(t,\omega) - Ey(t,\omega) = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{x(u,\omega) - Ex(u,\omega)}{a_n(u)}\, du \tag{11}$$

czyli funkcja korelacji

$$K_y(t_1,t_2) = E\left\{\left[y(t_1,\omega) - Ey(t_1,\omega)\right] \cdot \left[y(t_2,\omega) - Ey(t_2,\omega)\right]\right\} =$$

$$= E\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{(t_1-u_1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(t_2-u_2)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{x(u_1,\omega) - Ex(u_1,\omega)}{a_n(u_1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{x(u_2,\omega) - Ex(u_2,\omega)}{a_n(u_2)}\, du_2\, du_1 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{(t_1-u_1)^{n-1} \cdot (t_2-u_2)^{n-1}}{\left[(n-1)!\right]^2 \cdot a_n(u_1)\cdot a_n(u_2)} \cdot$$

$$\cdot K_x(u_1, u_2)\, du_2\, du_1, \tag{12}$$

(gdzie $K_x(u_1,u_2)$ - funkcja korelacji procesu $x(t,\omega)$), a wariancja:

$$\sigma_y^2(t) = K_y(t,t) = \int_0^t\int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1} \cdot (t-u_2)^{n-1}}{\left[(n-1)!\right]^2 \cdot a_n(u_1)\cdot a_n(u_2)} \cdot K_x(u_1,u_2)\, du_2\, du_1. \tag{13}$$

Natomiast funkcja korelacji rzędu r ma postać:

$$K_y(t_1,\dots,t_r) = E\left\{\left[y(t_1,\omega) - Ey(t_1,\omega)\right]\dots\left[y(t_r,\omega) - Ey(t_r,\omega)\right]\right\} =$$

$$= E\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_r} \frac{(t_1-u_1)^{n-1}}{(n-1)!}\dots\frac{(t_r-u_r)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{x(u_1,\omega) - Ex(u_1,\omega)}{a_n(u_1)}\dots$$

$$\dots\cdot\frac{x(u_r,\omega) - Ex(u_r,\omega)}{a_n(u_r)}\,du_r\dots du_1 =$$

$$= \int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_r}\frac{(t_1-u_1)^{n-1}\dots(t_r-u_r)^{n-1}}{\left[(n-1)!\right]^r\cdot a_n(u_1)\dots a_n(u_r)}\cdot K_x(u_1,\dots,u_r)\cdot du_r\dots du_1, \tag{14}$$

gdzie $K_x(u_1,\dots,u_r)$ - funkcja korelacji rzędu r procesu $x(t,\omega)$. Zdefiniujemy funkcję korelacji rzędu $l_1+\dots+l_r$ w postaci:

$$K_{y,l_1\dots l_r}(t_1,\dots,t_r) \overset{df}{=} E\left\{\left[y(t_1,\omega) - Ey(t_1,\omega)\right]^{l_1}\dots\right.$$

$$\left.\left[y(t_r,\omega) - Ey(t_r,\omega)\right]^{l_r}\right\}, \tag{15}$$

$$K_{y,l_1\dots l_r}(t_1,\dots,t_r) = E\underbrace{\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_1}}_{l_1}\dots\dots\dots\underbrace{\int_0^{t_r}\dots\int_0^{t_r}}_{l_r}$$

$$\frac{(t_1-u_{11})^{n-1}}{(n-1)!}\dots\frac{(t_1-u_{1l_1})^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{x(u_{11},\omega) - Ex(u_{11},\omega)}{a_n(u_{11})}\dots$$

$$\frac{x(u_{1l_1},\omega) - Ex(u_{1l_1},\omega)}{a_n(u_{1l_1})}\dots\cdot\frac{(t_r-u_{r1})^{n-1}}{(n-1)!}\dots\frac{(t_r-u_{rl_r})}{(n-1)!}\cdot$$

$$\frac{x(u_{r1},\omega) - Ex(u_{r1},\omega)}{a_n(u_{r1})}\dots\frac{x(u_{rl_r},\omega) - Ex(u_{rl_r},\omega)}{a_n(u_{rl_r})}\dots\dots$$

$$du_{rl_r} \ldots\ldots du_{r1} \ldots\ldots\ldots\ldots du_{1l_1} \ldots\ldots\ldots\ldots du_{11} = \underbrace{\int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_1}}_{l_1} \ldots \underbrace{\int_0^{t_r} \ldots \int_0^{t_r}}_{l_r}$$

$$\frac{(t_1-u_{11})^{n-1} \ldots (t_1-u_{1l_1})^{n-1} \ldots (t_r-u_{r1})^{n-1} \ldots (t_r-u_{rl_r})^{n-1}}{[(n-1)!]^{l_1+\ldots+l_r} \cdot a_n(u_{11}) \ldots a_n(u_{1l_1}) \ldots a_n(u_{r1}) \ldots a_n(u_{rl_r})} \cdot$$

$$\cdot K_x(u_{11},\ldots,u_{1l_1},\ldots,u_{r1},\ldots u_{rl_r}) du_{rl_r} \ldots du_{r1} \ldots du_{1l_1} \ldots du_{11} \tag{16}$$

i $K_x(u_{11}, \ldots, u_{rl_r})$ - funkcja korelacyjna rzędu $l_1+\ldots+l_r$ procesu $x(t,\omega)$.

W zagadnieniach praktycznych często zdarza się, że nie rozważamy rezolwenty jako sumy nieskończonej ze względu na pominięcie wyrazów w tej sumie począwszy od jakiegoś wskaźnika $m+1$. Tak więc zakładając, że rezolwenta składa się z m wyrazów i oznaczając tę sumę przez $R_m(t,u,\lambda)$ można dla dowolnego $\varepsilon > 0$ tak dobrać m ażeby

$$\bigwedge_{t,u \in [0,T]} \left|R(t,u,\lambda) - R_m(t,u,\lambda)\right| < \varepsilon. \tag{17}$$

W dalszych rozważaniach zajmiemy się oszacowaniem różnicy pomiędzy wariancją (13) liczoną dla rezolwenty będącej szeregiem nieskończonym lub skończonym przy warunku (17).
Wg (2b)(oraz [7])

$$\left|K_x(t_1,t_2) - K_{x,m}(t_1,t_2)\right| \leqslant |\lambda| \int_0^{t_1} \left|R(t_1,u_1,\lambda) - R_m(t_1,u_1\lambda)\right| \cdot$$

$$\left|K_h(t_2,u_1)\right| du_1 + |\lambda| \int_0^{t_2} \left|R(t_2,u_2,\lambda) - R_m(t_2,u_2,\lambda)\right| \cdot$$

$$\left|K_h(t_1,u_2)\right| du_2 + \lambda^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \left|R(t_1,u_1,\lambda) \cdot R(t_2,u_2,\lambda) -\right.$$

$$\left. - R_m(t_1,u_1,\lambda) \cdot R_m(t_2,u_2,\lambda)\right| \cdot \left|K_h(u_1,u_2)\right| du_2\, du_1 \tag{18}$$

($K_h(u_1,u_2)$ - funkcja korelacji procesu $h(t,\omega)$). Ze względu na (17) zachodzi:

$$\left|K_x(t_1,t_2) - K_{x,m}(t_1,t_2)\right| \leqslant |\lambda|\, \varepsilon \cdot \left\{\int_0^{t_1} \left|K_h(t_2, u_1)\right| du_1 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t_2} \left|K_h(t_1,u_2)\right| du_2 + 2|\lambda| Be^{|\lambda|Bt} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \left|K_h(u_1,u_2)\right| du_2\, du_1\right\}, \tag{19}$$

gdzie $B=B(t)$ jest niemalejącym oszacowaniem jądra równania (6) tzn.

$$B(t) \geqslant |K(t,u)| = \frac{\left|a_{n-1}(t)+\ldots+a_{n-k}(t)\cdot \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} +\ldots+a_0(t)\cdot \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\right|}{|a_n(u)|}. \tag{19a}$$

Uwzględniając, że $\lambda = -1$ oraz wprowadzając oznaczenia

$$G(t_2,t_1) \stackrel{df}{=} \int_0^{t_1} \left|K_h(t_2,u_1)\right| du_1,$$

$$H(t_1,t_2) \stackrel{df}{=} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \left|K_h(u_1,u_2)\right| du_2\, du_1, \tag{19b}$$

poszukiwane oszacowanie będzie postaci:

$$\left|\sigma_y^2 - \sigma_{y,m}^2\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\left[(n-1)!\right]^2} \left\{\int_0^t\int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1}\cdot (t-u_2)^{n-1}}{\left|a_n(u_1)\cdot a_n(u_2)\right|} \cdot \left[G(u_2,u_1) + \right.\right.$$

$$\left. + G(u_1,u_2)\right] du_2\, du_1 + 2\, Be^{Bt} \cdot \int_0^t\int_0^t \frac{(t-u_1)^{n-1}\cdot(t-u_2)^{n-1}}{\left|a_n(u_1)\cdot a_n(u_2)\right|} \cdot$$

$$\left. \cdot\, H(u_1,u_2) du_2\, du_1 \right\}. \tag{20}$$

Można jeszcze zastanowić się nad następującym zagadnieniem - ile trzeba wziąć wyrazów rezolwenty ażeby dla zadanego $\delta' > 0$ było:

$$\left|\sigma_y^2 - \sigma_{y,m}^2\right| \leqslant \delta'. \tag{21}$$

Wg (20) prawa strona nierówności musi być mniejsza od δ' a stąd:

$$\varepsilon \leqslant \frac{[(n-1)!]^2 \cdot \delta'}{\{\ldots\ldots\ldots\}}, \tag{22}$$

gdzie $\{\ldots\ldots\ldots\}$ jest wyrażeniem występującym w nawiasie po prawej stronie nierówności (20). Uwzględniając oszacowanie rezolwenty przy pomocy B mamy:

$$\frac{(Bt)^{m+1}}{(m+1)!}\, e^{Bt} \leqslant \frac{\varepsilon}{B} \tag{23}$$

czyli

$$\frac{(Bt)^{m+1}}{(m+1)!} \leqslant \frac{[(n-1)!]^2 \cdot \delta'}{Be^{Bt} \cdot \{\ldots\ldots\ldots\}}. \tag{24}$$

Na podstawie tej nierówności można obliczyć m - potrzebną ilość wyrazów w rezolwencie aby zachodził warunek (21).

LITERATURA

[1] Bharucha - Reid A.T.: Random Integral Equations, Academic Press New York and London 1972.

[2] Gołubiencjew A.N., Intiegralnyje mietody w dinamikie, Tiechnika, Kijew 1967.

[3] Piskorek A.: Równania całkowe, WNT, Warszawa 1971.

[4] Skalmierski B.; Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.

[5] Smirnow W.I.: Matematyka wyższa, tom IV-ty, PWN, Warszawa 1962.

[6] Sobczyk K.: Metody dynamiki statycznej, PWN, Warszawa 1973.

[7] Szopa J.: O funkcji korelacyjnej dla równania Volterry II-go rodzaju, Zesz.Nauk.Politechniki Śląskiej, seria Automatyka z. 28, Gliwice 1974.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ОПИСАННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Р е з ю м е

В работе выведены формулы для корреляционной функции н-ого порядка интегрального уравнения Вольтерры. Полученные результаты были применены в дифференциальных уравнениях н-ого порядка.

THE STOCHASTIC CHARACTERS OF DISPOSITIONS DESCRIBED BY THE RANDOM VOLTERRA INTEGRAL EQUATION AND ITS APPLICATION TO RANDOM ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

S u m m a r y

In the paper the pattern of the co-variance function of the order m of the random Volterra integral equation was presented. This pattern was applied to the ordinary differential equation of the order n.