ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Janusz Szopa

O WYZNACZANIU WARIANCJI STOCHASTYCZNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH ZA POMOCĄ STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH PRZY UWZGLĘDNIENIU JEDNEGO WYRAZU REZOLWENTY

Streszczenie: W pracy wykorzystano wyniki otrzymane poprzednio przez autora. Zastosowano wzory na funkcję korelacyjną dla stochastycznego równania całkowego Volterry II-go rodzaju oraz na wariancję dla stochastycznego równania różniczkowego. Wykorzystano jeden wyraz rezolwenty oraz oszacowano pojawiający się błąd.

W pracy [5] podano wzór na wariancję "na wyjściu" układu opisanego stochastycznym równaniem różniczkowym

$$m(t)\ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} + c(t)y = P(t,\omega), \tag{1}$$

gdzie:

$m(t)$, $\alpha(t)$, $c(t)$ - całkowalne funkcje rzeczywiste;

$P(t,\omega)$ - mierzalny rzeczywisty proces stochastyczny rzędu drugiego; warunki początkowe-zdeterminowane. Do wyprowadzenia tego wzoru posłużono się stochastycznym równaniem całkowym Volterry I rodzaju. Kształt jego jest następujący:

$$\sigma_y^2(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)\cdot(t-u_2)}{m(u_1)\ m(u_2)} K_x(u_1,u_2)du_2\, du_1, \tag{2}$$

gdzie:

$$K_x(t_1,t_2) = K_p(t_1,t_2) + \lambda\int_0^{t_1} R(t_1,u_1,\lambda)K_p(t_2,u_1)du_1 +$$

$$+\lambda\int_0^{t_2} R(t_2,u_2,\lambda)\cdot K_p(t_1,u_2)\,du_2 +$$

$$+\lambda^2\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R(t_1,u_1,\lambda)\cdot R(t_2,u_2\lambda)\cdot K_p(u_1,u_2)du_2\,du_1 \tag{3}$$

oraz $K_p(t_1, t_2)$ - funkcja korelacji procesu $P(t,\omega)$; $R(t,u,\lambda)$ - rezolwenta równania całkowego

$$x(t,\omega) = h(t,\omega) + \lambda\int_0^t K(t,u)x(u,\omega)\,du. \tag{4}$$

Dla układu opisanego równaniem (1) jądro równania (4) ma postać

$$K(t,u) = \frac{\alpha(t) + c(t)\cdot(t-u)}{m(u)}, \qquad \lambda = -1,$$

$$h(t,\omega) = -\left[\alpha(t)\cdot\dot{y}_0 + c(t)\cdot(\dot{y}_0\cdot t + y_0)\right] + P(t,\omega)$$

$$\text{i } x(t,\omega) = m(t)\ddot{y}(t,\omega).$$

W pracy [5] rozważono możliwość zbudowania rezolwenty $R(t,u,\lambda)$ ze skończonej ilości wyrazów oraz oszacowano pojawiający się wtedy błąd. Dla niektórych typów układów (np. rozruch układów dynamicznych o zmiennej inercji) można rozpatrywać wzór na wariancję σ_y^2 przy uwzględnieniu jednego wyrazu rezolwenty a pojawiający się błąd jest znikomy. Wtedy $R(t,u,\lambda) = K(t,u)$. W niniejszym opracowaniu wykorzystując (3) obliczono wg (2) wariancję σ_y^2 dla konkretnych parametrów układu opisanego przez (1) i zadanej funkcji korelacji. Zmiany parametrów dobrano tak aby można było podać interpretację techniczną ([4], [2], [3]). $m(t)$ jest np. masą lub momentem bezwładności, $\alpha(t)$ - współczynnikiem tłumienia, $c(t)$ - współczynnikiem sprężystości.

W celu ułatwienia dalszych rozważań przyjęto następujące oznaczenia

$$\overset{t_1}{\underset{o}{I}}(t_1, t_2) \overset{df}{=} \int_0^{t_1} K(t_1,u_1)\,K_p(t_2,u_1)\,du_1, \tag{5}$$

$$\overset{t_1}{\underset{0}{I}}\overset{t_2}{\underset{0}{}}(t_1, t_2) \overset{df}{=} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K(t_1,u_1)K(t_2,u_2)K_p(u_1,u_2)\,du_2\,du_1,$$

wtedy wg (3):

$$K_{x,o}(t_1,t_2) = K_p(t_1,t_2) - \overset{t_1}{\underset{0}{I}}(t_1,t_2) - \overset{t_2}{\underset{0}{I}}(t_2,t_1) + \overset{t_1}{\underset{0}{I}}\overset{t_2}{\underset{0}{}}(t_1,t_2) \tag{6}$$

($K_{x,o}(t_1,t_2)$ tj. oznaczenie na $K_x(t_1,t_2)$ przy rozważaniu jednego wyrazu w rezolwencie ([5])).

Rozpatrzono trzy warianty.

<u>Wariant I</u>

$$m(t) = a_1 e^{b_1 t} \quad \text{i} \quad a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0;$$

$$\alpha(t) = a_2 e^{b_2 t}; \qquad c(t) = a_3 e^{b_3 t}; \quad b_2 \neq b_1, \quad b_3 \neq b_1;$$

$$K_p(t,u) = Ce^{-\delta(t^2 + u^2)} \quad \text{i} \quad C > 0, \quad \delta > 0.$$

Wtedy

$$I_0^{t_1}(t_1,t_2) = C \int_0^{t_1} \frac{a_2 e^{b_2 t_1} + a_3 e^{b_3 t_1} \cdot (t_1 - u_1)}{a_1 e^{b_1 u_1}} \cdot e^{-\delta(t_2^2 + u_1^2)} du_1. \quad (7)$$

Wprowadzając funkcję pomocniczą ([1])

$$\Phi(t) \stackrel{df}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$$

oraz stosując podstawienie

$$\sqrt{\delta}\, u_1 + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}} = x,$$

jest

$$I_0^{t_1}(t_1,t_2) = \frac{C}{2\delta\sqrt{\delta}\, a_1} e^{-\delta t_2^2 + \frac{b_1^2}{4\delta}} \Big\{ \sqrt{\pi} \Big[\Phi\Big(\sqrt{\delta} t_1 + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\Big) -$$

$$- \Phi\Big(\frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\Big)\Big] \cdot \Big[\delta\big(a_2 e^{b_2 t_1} + a_3 t_1 e^{b_3 t_1}\big) + \frac{1}{2} b_1 a_3 e^{b_3 t_1}\Big] +$$

$$+ \sqrt{\delta}\, a_3 e^{b_3 t_1} \Big(e^{-\left(\sqrt{\delta} t_1 + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\right)^2} - e^{-\frac{b_1^2}{4\delta}}\Big) \Big\} \stackrel{df}{=} C \cdot e^{-\delta t_2^2} \cdot g(t_1),$$

(8)

gdzie:

$$g(t_1) \stackrel{df}{=} \frac{1}{2\delta\sqrt{\delta}a_1} e^{\frac{b_1^2}{4\delta}} \left\{ \sqrt{\pi} \left[\Phi(\sqrt{\delta}t_1 + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}) - \Phi(\frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}) \right] \cdot \right.$$

$$\cdot \left[\delta(a_2 e^{b_2 t_1} + a_3 t_1 e^{b_3 t_1}) + \frac{1}{2} b_1 a_3 e^{b_3 t_1} \right] + \sqrt{\delta} a_3 e^{b_3 t_1} \cdot$$

$$\left. \cdot (e^{-(\sqrt{\delta}t_1 + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}})^2} - e^{-\frac{b_1^2}{4\delta}}) \right\}.$$

$I_0^{t_2}(t_2,t_1)$ otrzymano zmieniając w (8) t_1 z t_2 czyli

$$I_0^{t_2}(t_2,t_1) = Ce^{-\delta t_1^2} \cdot g(t_2).$$

$$I_0^{t_1}{}_0^{t_2}(t_1,t_2) = C \cdot \int_0^{t_1} \frac{a_2 e^{b_2 t_1} + a_3 e^{b_3 t_1} \cdot (t_1 - u_1)}{a_1 e^{b_1 u_1}} e^{-\delta u_1^2} du_1 \cdot$$

$$\cdot \int_0^{t_2} \frac{a_2 e^{b_2 t_2} + a_3 e^{b_3 t_2} \cdot (t_2 - u_2)}{a_1 e^{b_1 u_2}} e^{-\delta u_2^2} du_2 = C \cdot g(t_1) \cdot g(t_2). \tag{9}$$

Stąd

$$K_{x,o}(t_1,t_2) = C \left[e^{-\delta(t_1^2 + t_2^2)} - e^{-\delta t_2^2} \cdot g(t_1) - e^{-\delta t_1^2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot g(t_2) + g(t_1) \cdot g(t_2) \right]. \tag{10}$$

Podstawiając (10) do (2) jest ($\sigma_{y,o}^2$ tj. oznaczenie na σ_y^2 przy rozważaniu jednego wyrazu w rezolwencie ([5])):

$$\sigma_{y,o}^2(t) = C \cdot \int_0^t \frac{t - u_1}{a_1 e^{b_1 u_1}} \left[e^{-\delta u_1^2} \cdot \int_0^t \frac{t - u_2}{a_1 e^{b_1 u_2}} e^{-\delta u_2^2} du_2 - \right.$$

$$- e^{-\delta u_1^2} \cdot \int_0^t \frac{t - u_2}{a_1 e^{b_1 u_2}} g(u_2)\, du_2 - g(u_1) \cdot \int_0^t \frac{t - u_2}{a_1 e^{b_1 u_2}} \cdot$$

$$\cdot e^{-\delta u_2^2} du_2 + g(u_1) \cdot \int_0^t \frac{t - u_2}{a_1 e^{b_1 u_2}} \cdot g(u_2) du_2 \Big] du_1 . \tag{11}$$

Jeśli

$$G_1(t) \overset{df}{=} \int_0^t \frac{t - u_1}{a_1 e^{b_1 u_1}}\, e^{-\delta u_1^2}\, du_1 \quad \text{oraz}$$

$$G_2(t) \overset{df}{=} \int_0^t \frac{t - u_1}{a_1 e^{b_1 u_1}}\, g(u_1)\, du_1, \quad \text{to}$$

$$\sigma^2_{y,o} = C\left[G_2(t) - G_1(t)\right]^2 . \tag{12}$$

Po wyliczeniu:

$$G_1(t) = \frac{1}{2\delta\sqrt{\delta}\, a_1} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\Phi\left(\sqrt{\delta}\, t + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\right) - \Phi\left(\frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\right) \right] \cdot e^{\frac{b_1^2}{4\delta}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\ (2\delta\ t + b_1) + \sqrt{\delta}\left(e^{-\delta t^2 - b_1 t} - 1\right) \right\} . \tag{13}$$

W celu obliczenia $G_2(t)$ przekształcono tę funkcję do postaci:

$$G_2(t) = \frac{1}{a_1} \left\{ t \cdot \int_0^t e^{-b_1 u_1} g(u_1) du_1 - \int_0^t u_1 e^{-b_1 u_1} g(u_1) du_1 \right\} \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} \frac{1}{a_1} \left\{ t \cdot G_3(t) - G_4(t) \right\} , \tag{14}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia

$$G_3(t) = \int_0^t e^{-b_1u_1} g(u_1)du_1; \quad G_4(t) = \int_0^t u_1 e^{-b_1u_1} g(u_1)du_1. \tag{15}$$

Wtedy

$$G_3(t) = \frac{1}{2\delta\sqrt{\delta}a_1} e^{\frac{b_1^2}{4\delta}} \cdot \Bigg\{\Bigg[\Phi(\sqrt{\delta}t + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}) - \Phi(\frac{b_1}{2\sqrt{\delta}})\Bigg] \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Bigg[\frac{\delta a_2}{b_2-b_1} \cdot$$

$$\cdot e^{(b_2-b_1)t} + \frac{a_3e^{(b_3-b_1)t}}{2(b_3-b_1)^2}\Big[2\delta((b_3-b_1)\cdot t-1)+b_1(b_3-b_1)\Big]\Bigg] +$$

$$+\Bigg[\Phi(\sqrt{\delta}t + \frac{2b_1-b_2}{2\sqrt{\delta}}) - \Phi(\frac{2b_1-b_2}{2\sqrt{\delta}})\Bigg] \cdot \sqrt{\pi}\frac{\delta a_2}{b_1-b_2} e^{\frac{(b_1-b_2)(3b_1-b_2)}{4\delta}} +$$

$$+\Bigg[\Phi(\sqrt{\delta}t + \frac{2b_1-b_3}{2\sqrt{\delta}}) - \Phi(\frac{2b_1-b_3}{2\sqrt{\delta}})\Bigg] \cdot \sqrt{\pi}\frac{\delta a_3}{(b_3-b_1)^2} \cdot$$

$$\cdot e^{\frac{(b_1-b_3)(3b_1-b_3)}{4\delta}} + \frac{\sqrt{\delta}a_3}{b_3-b_1} e^{-\frac{b_1^2}{4\delta}}\Big[e^{-\delta t^2-b_1t} - 1\Big] \cdot$$

$$\cdot e^{(b_3-b_1)t}\Bigg\}. \tag{16}$$

natomiast $G_4(t)$ można obliczyć całkując przez części tzn. jeśli

$$G_5(t) \stackrel{df}{=} e^{-b_1t} \cdot g(t) \text{ i } G_5(t) \stackrel{df}{=} \frac{d\,G_6(t)}{dt} \tag{17}$$

to

$$G_4(t) = t \cdot G_6(t) - \int_0^t G_6(t)\,dt. \tag{18}$$

Po wyliczeniach:

$$G_6(t) = \frac{1}{2\delta\sqrt{\delta}a_1} e^{\frac{b_1^2}{4\delta}} \Bigg\{\Bigg[\Phi(\sqrt{\delta}t + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}) - \Phi(\frac{b_1}{2\sqrt{\delta}})\Bigg] \sqrt{\pi} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\delta a_2}{b_2-b_1} e^{(b_2-b_1)t} + \frac{a_3 e^{(b_3-b_1)t}}{2(b_3-b_1)^2}\left[2\delta((b_3-b_1)\cdot t-1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b_1(b_3-b_1)\right]\right] + \Phi\left(\sqrt{\delta}t + \frac{2b_1-b_2}{2\sqrt{\delta}}\right)\cdot\sqrt{\pi}\delta\,\frac{a_2}{b_1-b_2}\cdot e^{\frac{(b_1-b_2)(3b_1-b_2)}{4\delta}} +$$

$$+\Phi\left(\sqrt{\delta}t + \frac{2b_1-b_3}{2\sqrt{\delta}}\right)\cdot\sqrt{\pi}\delta\cdot\frac{a_3}{(b_3-b_1)^2} e^{\frac{(b_1-b_3)(3b_1-b_3)}{4\delta}} +$$

$$+\sqrt{\delta}a_3\frac{1}{b_3-b_1} e^{-\frac{b_1^2}{4\delta}}\cdot e^{(b_3-b_1)t}\cdot\left[e^{-\delta t^2-b_1 t} - 1\right]\Bigg\} \tag{19}$$

oraz

$$\int_0^t G_6(t)dt = \frac{1}{2\delta\sqrt{\delta}a_1} e^{\frac{b_1^2}{4\delta}}\Bigg\{\Phi\left(\sqrt{\delta}t + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\right)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\left[\frac{\delta a_2}{(b_2-b_1)^2} e^{(b_2-b_1)\cdot t} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_3}{2(b_3-b_1)^3} e^{(b_3-b_1)t}\cdot\left[2\delta((b_3-b_1)t-2) + b_1(b_3-b_1)\right]\right] - \Phi\left(\sqrt{\delta}t+\frac{2b_1-b_2}{2\sqrt{\delta}}\right)$$

$$\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{a_2}{2(b_2-b_1)^2} e^{\frac{(b_1-b_2)(3b_1-b_2)}{4\delta}}\cdot\left[2\delta(1 + (b_2-b_1)t) + \right.$$

$$\left. + (b_2-b_1)(2b_1-b_2)\right]\cdot\Phi\left(\frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\right)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\left[\frac{\delta a_2}{(b_2-b_1)^2} e^{(b_2-b_1)\cdot t} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_3}{2(b_3-b_1)^3} e^{(b_3-b_1)t}\cdot\left[2\delta((b_3-b_1)t - 2) + b_1(b_3-b_1)\right]\right] +$$

$$+\Phi\left(\frac{2b_1-b_2}{2\sqrt{\delta}}\right)\sqrt{\pi}\cdot\frac{a_2}{2(b_2-b_1)^2} e^{\frac{(b_1-b_2)(3b_1-b_2)}{4\delta}}\cdot\left[2\delta + (b_2-b_1)(2b_1-b_2)\right] +$$

$$+\Phi\left(\sqrt{\delta}t + \frac{2b_1-b_3}{2\sqrt{\delta}}\right)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{a_3}{(b_3-b_1)^3} e^{\frac{(b_1-b_3)(3b_1-b_3)}{4\delta}}\cdot\left[2\delta(2+(b_3-b_1)t)+\right.$$

$$+ (b_3-b_1)(2b_1-b_3)\Big] - \Phi\left(\frac{2b_1-b_3}{2\sqrt{\delta}}\right) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, \frac{a_3}{(b_3-b_1)^3} \cdot e^{\frac{(b_1-b_3)(3b_1-b_3)}{4\delta}} \cdot$$

$$\cdot \Big[4\delta + (b_3-b_1)(2b_1-b_3)\Big] + \sqrt{\delta}\, e^{-\frac{b_1^2}{4\delta}} \cdot \Big[\frac{a_3}{(b_3-b_1)^2} \Big(2e^{-\delta t^2-(2b_1-b_3)t} -$$

$$- e^{(b_3-b_1)t} - 1\Big) + \frac{a_2}{b_2-b_1}\Big(1 - e^{-\delta t^2-(2b_1-b_2)t}\Big)\Big]\Big\}. \qquad (20)$$

Wstawiając (19) i (20) do (18) później (16) i (18) do (14) a dalej (13) i (14) do (12) otrzymano końcowy wzór na $\sigma_{y,o}^2$ w postaci:

$$\sigma_{y,o}^2(t) = \frac{C}{4\delta^3 a_1^4} e^{\frac{b_1^4}{16\delta^2}} \Big[\Big[\mathrm{Erf}\Big(\sqrt{\delta}t + \frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\Big) - \mathrm{Erf}\Big(\frac{b_1}{2\sqrt{\delta}}\Big)\Big] \cdot$$

$$\cdot \Big[\frac{2\delta a_2}{(b_2-b_1)^2} e^{(b_2-b_1)t} + \frac{a_3}{(b_3-b_1)^3} e^{(b_3-b_1)t} \cdot \Big[2\delta\,((b_3-b_1)t-2) +$$

$$b_1(b_3-b_1)\Big] - a_1(2\delta t+b_1)\Big] - \Big[\mathrm{Erf}\Big(\sqrt{\delta}t + \frac{2b_1-b_2}{2\sqrt{\delta}}\Big) - \mathrm{Erf}\Big(\frac{2b_1-b_2}{2\sqrt{\delta}}\Big)\Big] \cdot$$

$$\cdot \frac{a_2}{(b_2-b_1)^2} e^{\frac{(b_1-b_2)(3b_1-b_2)}{4\delta}} \Big[2\delta\Big[(b_2-b_1)t+1\Big] + (b_2-b_1)(2b_1-b_2)\Big] +$$

$$+ \Big[\mathrm{Erf}\Big(\sqrt{\delta}t + \frac{2b_1-b_3}{2\sqrt{\delta}}\Big) - \mathrm{Erf}\Big(\frac{2b_1-b_3}{2\sqrt{\delta}}\Big)\Big] \cdot \frac{a_3}{(b_3-b_1)^3} e^{\frac{(b_1-b_3)(3b_1-b_3)}{4\delta}} \cdot$$

$$\cdot \Big[2\delta\,\Big[(b_3-b_1)\cdot t + 2\Big] + (b_3-b_1)(2b_1-b_3)\Big] +$$

$$+\sqrt{\delta}\, e^{-\frac{b_1^2}{4\delta}} \Big[\frac{a_3}{(b_3-b_1)^2}\Big(2e^{-\delta t^2-(2b_1-b_3)t} - e^{(b_3-b_1)t} - 1\Big) +$$

$$+ \frac{a_2}{b_2-b_1}\Big(1-e^{-\delta t^2-(2b_1-b_2)t}\Big) - a_1\Big(e^{-\delta t^2-b_1 t} - 1\Big)\Big]\Big]^2, \qquad (21)$$

gdzie:

$$\mathrm{Erf}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(t).$$

Wariant II

$m(t) = 1+a_1 t$ przy założeniu, że dla rozważanych t: $1+a_1 t \neq 0$;

$\alpha(t) = a_2$ i $a_2 \neq 0$; $c(t) = 0$;

$K_p(t,u) = Ce^{-\delta(t^2+u^2)}$ i $C>0$, $\delta > 0$.

Wtedy

$$I_0^{t_1}(t_1,t_2) = Ca_2 e^{-\delta t_2^2} \cdot \int_0^{t_1} \frac{e^{-\delta u_1^2}}{1+a_1 u_1}\,du_1 \tag{22}$$

$$I_0^{t_2}(t_2,t_1) = Ca_2 e^{-\delta t_1^2} \cdot \int_0^{t_2} \frac{e^{-\delta u_2^2}}{1+a_1 u_2}\,du_2$$

oraz

$$I_{0\,0}^{t_1 t_2}(t_1,t_2) = Ca_2^2 \cdot \int_0^{t_1} \frac{e^{-\delta u_1^2}}{1+a_1 u_1}\,du_1 \cdot \int_0^{t_2} \frac{e^{-\delta u_2^2}}{1+a_1 u_2}\,du_2 .$$

Wprowadzając

$$E(t) \overset{\mathrm{df}}{=} e^{-\delta t^2}; \quad F(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{t} \frac{e^{-\delta u^2}}{1+a_1 u}\,du \tag{23}$$

przekształcono (6) do postaci:

$$K_{x,o}(t_1,t_2) = C \cdot \Big[E(t_1)\,E(t_2) - a_2\big[E(t_2)\cdot F(t_1) + E(t_1)\cdot F(t_2)\big] + a_2^2 \cdot F(t_1)\cdot F(t_2)\Big]. \tag{24}$$

Podstawiając (24) do (2) jest:

$$\sigma^2_{y,o}(t) = C\left\{\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1} E(u_1)\,du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2} E(u_2)du_2 -\right.$$

$$- a_2\left[\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1} F(u_1)\,du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2} E(u_2)du_2 +\right.$$

$$\left.+\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1} E(u_1)du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2} F(u_2)du_2\right] +$$

$$\left.+ a_2^2 \int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1} F(u_1)du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2} F(u_2)\,du_2\right\}.$$

Wprowadzając dwie nowe funkcje:

$$H_1(t) \stackrel{df}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u} E(u)\,du = \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u} e^{-\delta u^2}\,du; \tag{25}$$

$$H_2(t) \stackrel{df}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u} F(u)\,du = \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u} \cdot \left(\int_0^u \frac{e^{-\delta x^2}}{1+a_1 x} dx\right) du,$$

otrzymano wzór na $\sigma^2_{y,o}$ w postaci:

$$\sigma^2_{y,o}(t) = C \cdot \left\{H_1(t) - a_2 H_2(t)\right\}^2. \tag{26}$$

<u>Wariant III</u>

$m(t) = 1+a_1 t$ przy założeniu, że dla rozważanych t: $1+a_1 t \neq 0$

$\alpha(t) = a_2$ i $a_2 \neq 0$; $c(t) = 0$;

$K_p(t,u) = C \cdot \cos\gamma(t-u)$ i $C>0$, $\gamma \neq 0$.

Wtedy

$$I_0^{t_1}(t_1,t_2) = C \cdot a_2 \left[\cos\vartheta t_2 \cdot \int_0^{t_1} \frac{\cos\vartheta u_1}{1+a_1\ u_1}\, du_1 + \sin\vartheta t_2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^{t_1} \frac{\sin\vartheta u_1}{1+a_1\ u_1}\, du_1\right] \tag{27}$$

$$I_0^{t_2}(t_2,t_1) = C \cdot a_2 \left[\cos\vartheta t_1 \cdot \int_0^{t_2} \frac{\cos\vartheta u_2}{1+a_1\ u_2}\, du_2 + \sin\vartheta t_1 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^{t_2} \frac{\sin\vartheta u_2}{1+a_1\ u_2}\, du_2\right]$$

oraz

$$I_0^{t_1}{}_0^{t_2}(t_1,t_2) = C \cdot a_2^2 \left[\int_0^{t_1} \frac{\cos\vartheta u_1}{1+a_1\ u_1}\, du_1 \cdot \int_0^{t_2} \frac{\cos\vartheta\ u_2}{1+a_1\ u_2}\, du_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t_1} \frac{\sin\vartheta u_1}{1+a_1\ u_1}\, du_1 \cdot \int_0^{t_2} \frac{\sin\vartheta\ u_2}{1+a_1\ u_2}\, du_2\right].$$

Jeśli:

$$M_1(t) \stackrel{df}{=} \int_0^{t} \frac{\cos\vartheta\ u}{1+a_1\ u}\, du; \qquad N_1(t) \stackrel{df}{=} \int_0^{t} \frac{\sin\vartheta\ u}{1+a_1\ u}\, du, \tag{28}$$

to wg (6)

$$K_{x,o}(t_1,t_2) = C\left[\cos\vartheta\,(t_2-t_1) - a_2\cos\vartheta t_2 \cdot M_1(t_1) - a_2\sin\vartheta t_2 \cdot N_1(t_1) - \right.$$

$$- a_2\cos\vartheta t_1 \cdot M_1(t_2) - a_2\sin\vartheta t_1 \cdot N_1(t_2) + a_2^2\, M_1(t_1)\cdot M_1(t_2) +$$

$$\left. + a_2^2\, N_1(t_1)\cdot N_1(t_2)\right]. \tag{29}$$

oraz wg (2)

$$\sigma^2_{y,o}(t) = C\Bigg[\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1u_1}\cos\vartheta u_1\, du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\cos\vartheta u_2\, du_2 +$$

$$+\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1}\sin\vartheta u_1\, du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\sin\vartheta u_2\, du_2 -$$

$$- a_2\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1}\cdot M_1(u_1)\, du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\cos\vartheta\, u_2\, du_2 -$$

$$- a_2\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1}\cdot N_1\,(u_1)du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\sin\vartheta\, u_2\, du_2 -$$

$$- a_2\cdot\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1}\cos\vartheta\, u_1\, du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\cdot M_1\,(u_2)\, du_2 -$$

$$- a_2\cdot\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1}\sin\vartheta u_1\, du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\cdot N_1(u_2)\, du_2 +$$

$$+ a_2^2\cdot\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1}\cdot M_1(u_1)\, du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\, M_1(u_2)\, du_2 +$$

$$+ a_2^2\cdot\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1}\cdot N_1(u_1)du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\, N_1(u_2)\, du_2\Bigg]. \tag{30}$$

Wprowadzając

$$M_2(t) \stackrel{df}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u}\cos\vartheta u\, du; \quad N_2(t) \stackrel{df}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u}\sin\vartheta\, udu; \tag{31}$$

$$M_3(t) \stackrel{df}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u}\cdot M_1(u)du; \quad N_3(t) \stackrel{df}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+a_1 u}\cdot N_1(u)\, du$$

wzór (29) przekształcono następująco:

$$\sigma^2_{y,o}(t) = C\left[(M_2(t) - a_2 \cdot M_3(t))^2 + (N_2(t) - a_2 \cdot N_3(t))^2\right]. \tag{32}$$

Warto zaznaczyć, że dla wiariantu I tylko funkcję Erf(t) trzeba obliczać numerycznie, natomiast dla wariantów II i III wszystkie funkcje występujące we wzorach końcowych na $\sigma^2_{y,o}$ muszą być liczone numerycznie.
Dla rozpatrzonych przypadków oszacowano pojawiające się błędy ze względu na rozważanie jednego wyrazu w rezolwencie. Posłużono się wzorami z [5] i [6].
Wg nich zachodzi zależność:

$$\frac{(Bt)^{m+1}}{(m+1)!} \leqslant \frac{\delta'}{Be^{Bt}\cdot[\ldots]}, \tag{33}$$

gdzie

B=B(t) - niemalejące oszacowanie jądra; dla (1)

$$B(t) \geqslant |K(t,u)| = \left|\frac{\alpha(t)+c(t)\cdot(t-u)}{m(u)}\right|, \quad 0 \leqslant u \leqslant t; \tag{34}$$

m + 1 - ilość wyrazów występujących w rezolwencie (obecnie m+1=1);
δ' - oszacowanie różnicy między σ^2_y i $\sigma^2_{y,m}$ tj.

$$|\sigma^2_y - \sigma^2_{y,m}| \leqslant \delta';$$

$$[\ldots\ldots] \overset{df}{=} \int_0^t\int_0^t \frac{(t-u_1)(t-u_2)}{|m(u_1)m(u_2)|}\cdot\left[D_1(u_2,u_1) + D_1(u_1,u_2)\right]du_2du_1 +$$

$$+ 2Be^{Bt}\cdot\int_0^t\int_0^t \frac{(t-u_1)(t-u_2)}{|m(u_1)m(u_2)|}\cdot D_2(u_1,u_2)du_2du_1 \tag{35}$$

oraz

$$D_1(t_2,t_1) \overset{df}{=} \int_0^{t_1} |K_p(t_2,u_1)|\,du_1,$$

$$D_2(t_1,t_2) \overset{df}{=} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} |K_p(u_1,u_2)|\,du_2\,du_1.$$

Ze wzoru (33) obliczono δ' dla powyższych wariantów:

$$\delta' \geqslant B^2 e^{Bt} \cdot t \, [\ldots\ldots] . \tag{36}$$

Bardziej szczegółowo:

a) dla wariantu I

$$B(t) \geqslant \left| \frac{a_2 e^{b_2 t} + a_3 e^{b_3 t} \cdot (t-u)}{a_1 e^{b_1 u}} \right| ,$$

stąd zdefiniowano $B(t)$ jako:

$$B(t) \overset{df}{=} \begin{cases} \left|\frac{a_2}{a_1}\right| e^{(b_2-b_1)t} + \left|\frac{a_3}{a_1}\right| \cdot t \cdot e^{(b_3-b_1)t} & \text{dla } b_1 < 0 \\ \left|\frac{a_2}{a_1}\right| e^{b_2 t} + \left|\frac{a_3}{a_1}\right| t e^{b_3 t} & \text{dla } b_1 \geqslant 0 \end{cases} \tag{37}$$

zaś dla $[\ldots\ldots]$ można przyjąć oszacowanie $(|K_p(t,u)| \leqslant C)$

$$[\ldots\ldots] \leqslant 2C \left[\int_0^t \frac{t-u_1}{|a_1|} u_1 e^{-b_1 \cdot u_1} du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{|a_1|} e^{-b_1 u_2} du_2 + \right.$$

$$\left. + Be^{Bt} \left(\int_0^t \frac{t-u_1}{|a_1|} u_1 e^{-b_1 u_1} du_1 \right)^2 \right] \overset{df}{=} D_3(t) \tag{38}$$

czyli

$$D_3(t) = \frac{2C}{a_1^2 \cdot b_1^3} \cdot \left[b_1 t (e^{-b_1 t} + 1) + 2(e^{-b_1 t} - 1) \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{b_1 t + e^{-b_1 t} - 1}{b_1^2} + \frac{Be^{Bt}}{b_1^3} \left[b_1 t (e^{-b_1 t} + 1) + 2(e^{-b_1 t} - 1) \right] \right\} \tag{39}$$

a więc δ' można przyjąć jako:

$$\delta' = B^2 \cdot e^{Bt} \cdot t \cdot D_3(t) \tag{40}$$

b) dla wariantów II i III

$$B(t) \geqslant \frac{|a_2|}{|1+a_1 u|} \tag{41}$$

stąd zdefiniowano B(t) jako

$$B(t) \stackrel{df}{=} \begin{cases} |a_2| & \text{dla } a_1 > 0 \\ \dfrac{|a_2|}{|1+a_1 t|} & \text{dla } a_1 < 0. \end{cases} \tag{42}$$

Natomiast

$$[\ldots\ldots] \leqslant 2\,C \cdot \Big[\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1} \cdot u_1 du_1 \cdot \int_0^t \frac{t-u_2}{1+a_1 u_2}\, du_2 +$$

$$+ Be^{Bt} \cdot \Big(\int_0^t \frac{t-u_1}{1+a_1 u_1} \cdot u_1 du_1\Big)^2\Big] \stackrel{df}{=} D_4(t) \tag{43}$$

czyli

$$D_4(t) = 2\,C\left[\frac{t(a_1 t+2)}{2a_1^2} - \frac{a_1 t+1}{a_1^3}\ln(a_1 t+1)\right] \cdot \left\{\frac{a_1 t+1}{a_1^2} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \ln(a_1 t+1) - \frac{t}{a_1} + Be^{Bt}\left[\frac{t(a_1 t+2)}{2a_1^2} - \frac{a_1 t+1}{a_1^3}\ln(a_1 t+1)\right]\right\} \tag{44}$$

a więc δ' można przyjąć jako

$$\delta' = B^2 \cdot e^{Bt} \cdot t \cdot D_4(t). \tag{45}$$

LITERATURA

[1] Hadżi P.I.; Funkcja wierojatnosti, Redakcjonno - izdatielskij otdiel Akademii Nauk Mołdawskoj SSR, Kiszyniew 1971.

[2] Kosmodiemjanskij A.A.: Kurs tieorieticzieskoj mechaniki, Izd. Proswieszczienije, Moskwa 1966.

[3] Nowosiełow W.S.: Analiticzieskaja mechanika sistiem s pieriemiennymi massami, Izd. Lieningradskowo Uniwiersitieta, 1969.

[4] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków PWN, Warszawa, 1973.

[5] Szopa J.: O funkcji korelacyjnej dla równania Volterry II rodzaju, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Automatyka z. 28, Gliwice 1974.

[6] Szopa J.: Charakterystyki stochastyczne układów opisanych stochastycznymi równaniami całkowymi Volterry II rodzaju i ich zastosowanie do stochastycznych równań różniczkowych, (w druku - w niniejszym zeszycie).

ДИСПЕРСИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСАННЫХ ИНТАГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО ЧЛЕНА РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Р е з ю м е

В равоте рассмотрены три случаи уравнений движения. Вычислена дисперсия.

THE VARIANCE OF THE DYNAMIC DISPOSITIONS DESCRIBED WITH THE AID OF RANDOM INTEGRAL EQUATIONS TAKING INTO CONSIDERATION THE RESOLVENT

S u m m a r y

In this paper there were analysed three cases of motion equations. The patterns of the variance were presented.