

Janusz Szopa, Marek Wojtylak

WARIANCJA STOCHASTYCZNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH W FAZIE ROZRUCHU
PRZY WOLNYCH ZMIANACH PARAMETRÓW

Streszczenie: W pracy rozważono rozruch stochastycznego układu dynamicznego o 1 stopniu swobody ze zmiennym czasowo parametrem i przy działającym losowym zaburzeniu.

Rozważać będziemy ruch układu dynamicznego o 1 stopniu swobody opisanego równaniem:

$$m(t)\ddot{y} + a\dot{y} = P(t, \omega), \quad (1)$$

gdzie ([1], [2], [3]):

$m(t)$ - masa lub moment bezwładności,

a - stały współczynnik tłumienia,

$P(t, \omega)$ - rzeczywisty, mierzalny proces stochastyczny rzędu II.

W pracy zbadano wariancję σ_y^2 dla równania (1) w zależności od postaci funkcji korelacji procesu $P(t, \omega)$, funkcji $m(t)$ i współczynnika a . Zastosowano metodę ([4], [5]) stochastycznych równań całkowych Volterry II rodzaju biorąc pod uwagę wzory otrzymane dla stochastycznych równań różniczkowych przy uwzględnianiu 1 wyrazu rezolwenty.

W dynamice punktu materialnego o zmiennej masie (1) jest szczególnym przypadkiem równania Mieszczerskiego ([1], [2]). Opisuje ono np. ruch rakiety, zjawisko kondensacji itp.

Wyniki szczegółowe badano dla trzech przypadków w zależności od postaci funkcji korelacji oraz funkcji $m(t)$.

Wariant I

$$m(t) = e^{bt} \quad \text{i } b \neq 0;$$

$$-(t^2 + u^2)$$

$$K_p(t, u) = e$$

Wtedy wg [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 = & \frac{1}{4} \left\{ \left[\operatorname{Erf}\left(t + \frac{b}{2}\right) - \operatorname{Erf}\left(\frac{b}{2}\right) \right] \cdot \left[\frac{2a}{b^2} e^{-bt} - (2t + b) \right] \cdot e^{\frac{b^2}{4}} + \right. \\ & + \left[\operatorname{Erf}(t+b) - \operatorname{Erf}(b) \right] \cdot \frac{2a}{b^2} e^{b^2} \cdot [bt - 1 + b^2] + \frac{a}{b} (e^{-t^2 - 2bt} - 1) + \\ & \left. + 1 - e^{-t^2 - bt} \right\}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: $\operatorname{Erf}(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$.

σ_y^2 obliczono numerycznie z wykorzystaniem procedury bibliotecznej o nazwie $\operatorname{Erf}(x)$ ([6]) maszyny cyfrowej ODRA 1204.

Wariant II

$m(t) = 1+bt$ przy założeniu, że dla rozważanych $t: 1+bt \neq 0$;

$$K_p(t, u) = e^{-(t^2 + u^2)}.$$

Wtedy wg [5]

$$\sigma_y^2 = [H_1(t) - a H_2(t)]^2, \quad (3)$$

gdzie:

$$H_1(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+bu} e^{-u^2} du,$$

$$H_2(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+bu} \cdot \left(\int_0^u \frac{e^{-x^2}}{1+bx} dx \right) du.$$

Całki we wzorach na $H_1(t)$ i $H_2(t)$ obliczono przy zastosowaniu procedury o nazwie $\operatorname{Int} \operatorname{Simps}$, przy czym po obliczeniu całki wewnętrznej we wzorze na $H_2(t)$ aproksymowano ją wielomianem stopnia 13 zgodnie z drugim algorytmem Remeza.

Wariant III

$m(t) = 1 + bt$ przy założeniu, że dla rozważanych t : $1 + bt \neq 0$;

$$K_p(t, u) = \cos(t - u).$$

Wtedy wg [5]

$$\sigma_y^2 = [M_2(t) - a \cdot M_3(t)]^2 + [N_2(t) - a \cdot N_3(t)]^2, \quad (4)$$

gdzie:

$$M_2(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+bu} \cos u \, du, \quad N_2(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+bu} \sin u \, du,$$

$$M_3(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+bu} M_1(u) \, du, \quad N_3(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t \frac{t-u}{1+bu} N_1(u) \, du,$$

$$M_1(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t \frac{\cos u}{1+bu} \, du, \quad N_1(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{1+bu} \, du.$$

Przy liczeniu całek występujących w powyższych wzorach zastosowano złożony wzór Simpsona.

Pojawiający się błąd, ze względu na rozważanie 1 wyrazu rezolwenty ma postać ([5]):

$$\delta^* = B^2 e^{Bt} \cdot t \cdot D(t), \quad (5)$$

gdzie:

a) dla wariantu I

$$B(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} |a| e^{-bt} & \text{dla } b < 0 \\ |a| & \text{dla } b \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$D(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{2}{b^3} \cdot [bt(e^{-bt} + 1) + 2(e^{-bt} - 1)].$$

$$\cdot \left[\frac{bt + e^{-bt} - 1}{b^2} + \frac{Be^{Bt}}{b^3} [bt(e^{-bt} + 1) + 2(e^{-bt} - 1)] \right].$$

b) dla wariantów II i III

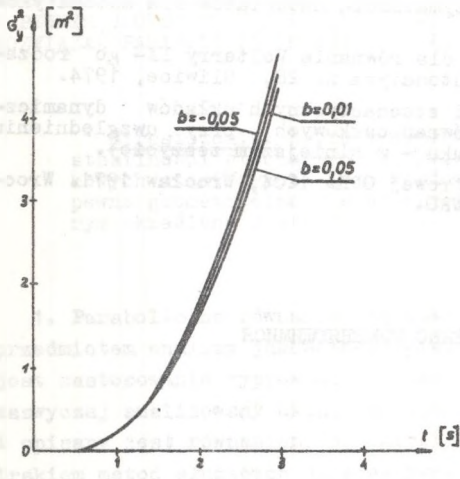
$$B(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} |a| & \text{dla } b \geq 0 \\ \frac{|a|}{|1+bt|} & \text{dla } b < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$D(t) \stackrel{\text{df}}{=} \left[\frac{t(bt+2)}{b^2} - \frac{2(bt+1)}{b^3} \ln(bt+1) \right].$$

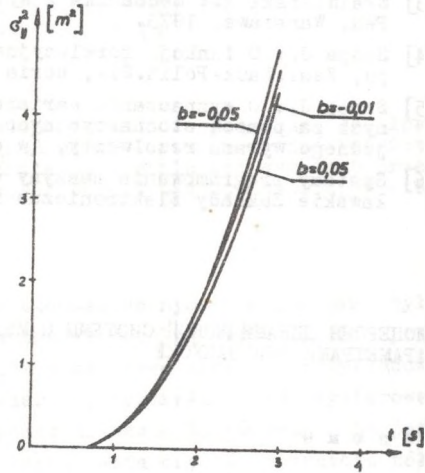
$$\cdot \left[\frac{bt+1}{b^2} \ln(bt+1) - \frac{t}{b} + Be^{Bt} \left[\frac{t(bt+2)}{2b^2} - \frac{bt+1}{b^3} \ln(bt+1) \right] \right].$$

Zmieniając parametry w (1) otrzymano wg (2), (3) i (4) szereg wykresów na σ_y^2 .

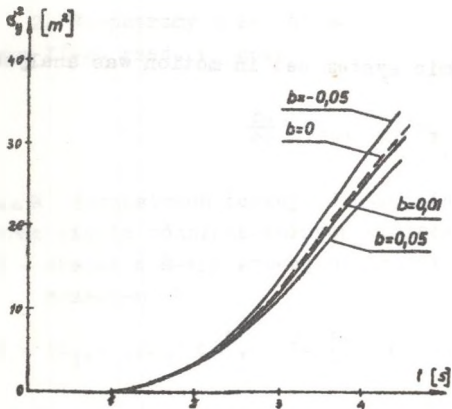
Przedstawiono je na rysunkach 1-4. Rysunek 1 przedstawia wykresy dla wariantu I ($b = 0,01$; $\pm 0,05$ i $a = 0,01$) z dokładnością do 1%; rysunek 2 - dla wariantu II ($b = -0,01$; $\pm 0,05$ i $a = 0,01$) z dokładnością do 1%; rysunek 3 - dla wariantu III ($b = 0,01$; $\pm 0,05$ i $a = 0,01$) z dokładnością do 1%; rysunek 4 - dla wariantu III ($b = 0,01$ i $a = 0,01; 0,02; 0,03$) z dokładnością do 2%. Ponadto na rysunku 3 linią przerywaną wrysowano wykres wariancji dla $b = 0$ liczonej wg funkcji przejścia dla układów o stałych współczynnikach [3] uzyskując w ten sposób sprawdzenie otrzymanych wyników. Na podstawie wykresów można podać następującą interpretację wyników: wariancja σ_y^2 jest funkcją rosnącą przy czym jeśli $m(t)$ jest większe to przy ustalonym a wariancja jest mniejsza i na odwrót, podobnie jeśli a większe to wariancja mniejsza i na odwrót.



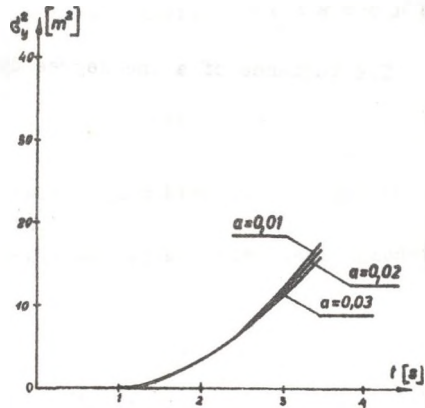
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

LITERATURA

- [1] Kosmodiemjanskij A.A.: Kurs teoreticzeskoj mechaniki, Izd. Pros-wieszczenie, Moskwa 1966.
- [2] Nowosielow W.S.: Analiticheskaia mechanika sistiem s pieriemiennymi massami, Izd. Leningradskowo Uniwiersiteta, 1969.
- [3] Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków PWN, Warszawa, 1973.
- [4] Szopa J.: O funkcji korelacyjnej dla równania Volterry II-go rodzaju, Zesz.Nauk.Polit.Śl., seria Automatyka z. 28, Gliwice, 1974.
- [5] Szopa J.: O wyznaczaniu wariancji stochastycznych układów dynamicznych za pomocą stochastycznych równań całkowych przy uwzględnieniu jednego wyrazu rezolwenty, (w druku - w niniejszym zeszycie).
- [6] Systemy programowania maszyny cyfrowej ODRA 1204, Wrocław 1971. Wrocławskie Zakłady Elektroniczne ELWRO.

ДИСПЕРСИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ЗАПУСКЕ

R e z y m e

В работе рассмотрен запуск динамической системы.

THE VARIANCE OF THE DYNAMIC SYSTEMS SET IN MOTION WITH SLOWLY CHANGING PARAMETERS

S u m m a r y

The variance of a one-degree dynamic system set in motion was analysed