ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Andrzej Tylikowski, Maciej Tylikowski

O PEWNYM GEOMETRYCZNYM KRYTERIUM STOCHASTYCZNEJ STABILNOŚCI ROZWIĄZAŃ PARABOLICZNYCH RÓWNAŃ CZĄSTKOWYCH II RZĘDU

Streszczenie: W pracy wyprowadzono warunki dostateczne lokalnej stabilności stochastycznej rozwiązań parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych II-go rzędu. Kryteria stabilności wyrażono przez pewne geometryczne charakterystyki obszaru i brzegu obszaru, w którym określone jest równanie.

1. Paraboliczne równania cząstkowe ze stochastycznym parametrem były przedmiotem analizy jakościowej wielu autorów. Wspólną cechą ich prac jest zastosowanie wyprowadzonej teorii do stosunkowo prostych przykładów; zazwyczaj analizowany układ zajmuje obszar w przestrzeni jednowymiarowej i opisany jest równaniem o stałych współczynnikach. Spowodowane to jest brakiem metod służących do efektywnego wyznaczania czy to operatora półgrupowego czy to wartości własnych odpowiedniego zagadnienia brzegowego. Celem pracy jest sformułowanie twierdzenia pozwalającego na efektywne wyznaczenie kryteriów stabilności układów dynamicznych w bardziej urozmaiconych obszarach M-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej. W analizie posłużymy się bezpośrednią metodą Lapunowa oraz wynikami prac "Klubu twórczych matematyków miasta Lwowa" z zakresu jakościowej teorii równań cząstkowych [1].

2. Rozpatrzmy układ dynamiczny opisany parabolicznym równaniem cząstkowym II-go rzędu o budowie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + a_i\, u_{x_i} + (a_0+c)u, \quad x \in D, \tag{1}$$

$u \in W$ (przestrzeń funkcji dwukrotnie ciągle różniczkowalnych względem x oraz ciągle różniczkowalnych względem t),

D - obszar w M-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej z odcinkami gładkim brzegiem ∂D,

$x = (x_1, \ldots, x_M) \in E^M, \quad t \in [0, \infty)$,

$$\bigwedge_{\varphi_i \neq 0} \begin{array}{ll} u = 0 & x \in \partial D, \\ a_{ij}\, \varphi_i\, \varphi_j > 0 & \end{array} \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix}, \quad [a_1, \ldots a_M]$$ oraz współczynnik a_o są funkcjami czasu i położenia, c jest polem losowym. W równaniu (1) jak i w całej pracy obowiązuje konwencja sumacyjna. Zakładamy, że współczynniki macierzy A są dwukrotnie różniczkowalne, macierzy wierszowej a jednokrotnie różniczkowalne. Przyjmujemy, że wszystkie wielkości łącznie z polem losowym c są dostatecznie gładkie, aby zapewnić istnienie i jednoznaczność klasycznych rozwiązań równania (1). Zauważmy, że równanie (1) posiada rozwiązanie trywialne.

Definicja lokalnej stabilności stochastycznej [3]

Rozwiązanie trywialne równania (1) jest lokalnie stochastycznie stabilne, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{r>0} \|u_o\| < r \Rightarrow \bigwedge_{t>0} P\left\{\omega: \|u\| > \varepsilon\right\} < \delta, \tag{3}$$

gdzie przez $\|u\|$ oznaczamy normę rozwiązania u, rozumianą jako

$$\|u\| = \left(\int_D u^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Twierdzenie

Jeżeli

(i) proces $\sup_{x\in D} c\,(x,t,\omega)$ spełnia prawo wielkich liczb,

(ii) $m \overset{df}{=} \sup_{t>0} E \sup_{x\in D} c\,(x,t,\omega) < b/N$,

gdzie b spełnia warunek

(iii) $\left(\frac{\pi}{d_D}\right)^2 > b = N \max_{x\in D} a_o^*$,

$$N \overset{df}{=} \max_{x\in D} \max_{\|\varphi\|=1} (\varphi^T A^{-1} \varphi), \quad \varphi \in E^M, \quad \varphi_i \varphi_i = 1,$$

$$a_o^* \overset{df}{=} a_o + \frac{1}{2}(a_{ij})_{x_i x_j} - (a_i)_{x_i},$$

d_D jest wewnętrzną średnicą wypukłego obszaru D, to rozwiązanie trywialne równania (1) określonego w wypukłym obszarze D jest lokalnie stochastycznie stabilne.

Dowód

Jako funkcjonał przyjmujemy kwadrat normy rozwiązania. Po zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{d\,\|u\|^2}{d\,t} = 2\int_D u\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx.$$

Po podstawieniu prawej strony równania (1), scałkowaniu przez części i wykorzystaniu warunków brzegowych (2) pochodna funkcjonału jest równa

$$\frac{d\,\|u\|^2}{d\,t} = -2\int_D \left[a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j} + ((a_{ij})_{x_j} - a_i)\,u\,u_{x_i} - (a_o+c)\,u^2\right]dx. \tag{4}$$

Wprowadzamy do równości (4) funkcje B_i w następujący sposób

$$\frac{d\,\|u\|^2}{d\,t} = -2\int_D \Big\{a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + ((a_{ij})_{x_j} - a_i)u\,u_{x_i} + \Big[(B_i)_{x_i} - a_o - (B_i)_{x_i} - c\Big]u^2\Big\}\,dx,$$

a po scałkowaniu przez części mamy

$$\frac{d\,\|u\|^2}{dt} = -2\int_D \Big\{a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + 2K_i\,u\,u_{x_i} + \Big[(B_i)_{x_i} - a_o - c\Big]u^2\Big\}\,dx,$$

gdzie

$$K_i = B_i + \frac{1}{2}\Big[(a_{ij})_{x_j} - a_i\Big].$$

Wprowadźmy nowe zmienne podstawieniem (po i wziętym w nawias nie należy sumować)

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} - p_i\,u_i,$$

gdzie p_i są rozwiązaniami układu równań liniowych

$$a_{ij}\, p_j = -K_i,$$

otrzymamy wówczas

$$\frac{d\,\|u^2}{dt} = -2\int_D \left[a_{ij}\, v_i\, v_j + \left(\frac{J}{\det A} - c\right)u^2\right]dx,$$

gdzie

$$J = \begin{vmatrix} a_{11},\dots,a_{1M}, & & K_1 \\ a_{21},\dots,a_{2M}, & & K_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{M1},\dots,a_{MM}, & & K_M \\ K_1, & K_M, & (B_j)_{x_j} - a_o \end{vmatrix}.$$

Na podstawie dodatniej określoności macierzy A prawdziwa jest nierówność

$$\frac{d\,\|u\|^2}{dt} \leqslant -2\int_D \left(\frac{J}{\det A} - c\right)u^2\, dx.$$

Z algebry wyznaczników wynikają nierówności

$$J = \det A\left[(B_i)_{x_i} - a_o - (A^{-1})_{ij}\, K_i\, K_j\right] \geqslant$$

$$\geqslant \det A\left[(B_i)_{x_i} - a_o - N\, K_i\, K_1\right].$$

Wobec tego nierówność $J/\det A > b$ jest zmajoryzowana przez nierówność

$$(w_i)_{x_i} > N\, a_o^* + w_i\, w_i + b, \tag{5}$$

gdzie $w_i = NK_i$, znaczy to że każde rozwiązanie nierówności różniczkowej (5) spełnia warunek $J > b \det A$.

Założenie (iii) twierdzenia w przypadku wypukłego obszaru D zapewnia istnienie [1] funkcji B_i spełniających nierówność (5). Zatem

$$\frac{d\,\|u\|^2}{dt} \leq -2\left[b/N - \sup_{x\in D} c(x,t,\omega)\right]\|u\|^2.$$

Wykorzystanie założeń (i), (ii) oraz rozumowania przeprowadzonego w twierdzeniu o lokalnej stabilności stochastycznej [3, str. 15] kończy dowód twierdzenia.

Uwaga 1

Jeżeli $M=2$, obszar D jest wypukły założenie (iii) można zastąpić w następujący sposób:

$$\text{(iii}'\text{)} \qquad \left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{l_s}{F_D}\right)^2 > N \max_{x\in D} a_0^* + b,$$

gdzie l_s jest długością brzegu obszaru D, F_D jest polem obszaru D.

Jeżeli $M=2$, wypukły obszar D nie posiada punktów krytycznych oszacowanie można polepszyć przyjmując:

$$\text{(iii}''\text{)} \qquad \left(\frac{\pi}{4}\,\frac{l_s}{F_D}\right)^2 \left[1 + \left(1 - \frac{\pi d_D}{l_s}\right)^2\right] > N \max_{x\in D} a_0^* + b.$$

Uwaga 2

Twierdzenie można rozszerzyć na obszary wklęsłe odpowiednio modyfikując warunek (iii).

Uwaga 3

Korzystając ze standardowych metod używanych w teorii równań cząstkowych można dowieść lokalnej stabilności stochastycznej rozwiązania trywialnego równania (1) przy założeniu (i) oraz

$$\text{(ii}^*\text{)} \qquad \sup_{t>0} E \sup_{x\in D} c\,(x,t,\omega) < \frac{(\lambda\nu^2 - \bar{a}_0)^2 \quad \lambda s^2}{2\,\lambda s},$$

gdzie

$$\lambda\nu^2 > \bar{a}_0,$$

ν^2 jest dodatnią stałą zapewniającą spełnienie nierówności

$$\bigwedge_{\xi_i} \nu^2 |\xi|^2 \leq a_{ij}\ \xi_i\ \xi_j,$$

λ jest najmniejszą wartością własną laplasjanu przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$\lambda = \inf_{u \in W} \frac{\int_D |\nabla u|^2 \, dx}{\int_D u^2 \, dx},$$

$$\bar{a}_o = \sup_{x \in D} a_o,$$

$$s = \sup_i \sup_{x \in D} \left| a_i - (a_{ij})_{x_j} \right|.$$

Przykład 1

Rozpatrzmy zagadnienie dyfuzji (ruchu masy, ciepła, neutronów) w obszarze w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego o ramionach jednostkowych opisane równaniem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left[a + c(x,t,\omega) \right] u, \quad x \in D$$

$$u = 0 \quad x \in \partial D.$$

Z geometrii elementarnej wiadomo, że

$$d_D = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$$

zatem rozwiązanie trywialne jest lokalnie stochastycznie stabilne na mocy twierdzenia, jeżeli proces $\sup_{x \in D} c(x,t,\omega)$ spełnia prawo wielkich liczb oraz

$$m < \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \pi^2 - a \cong 2{,}91 \pi^2 - a,$$

$$a < \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \pi^2.$$

Ponieważ trójkąt nie ma punktów krytycznych skorzystać można z warunku (iii") (uwaga 1) i otrzymać lepsze oszacowanie, a mianowicie:

$$m < 3{,}4 \pi^2 - a.$$

Otrzymane wyniki można porównać z kryterium obliczonym na podstawie znajomości wartości własnej (dla równania o stałych współczynnikach) obszaru trójkątnego [2] o budowie

$$m < 5\pi^2 - a.$$

Przykład 2

Biorąc pod uwagę obszar w kształcie rombu o kącie ostrym $\pi/3$ założenie (iii) przybiera postać

$$m < 13{,}15 - a.$$

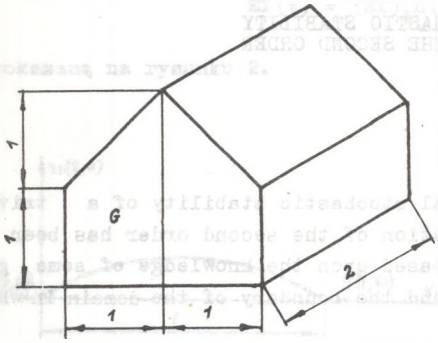
Warunek (iii") daje

$$m < 14{,}47 - a,$$

natomiast znajomość minimalnej wartości własnej prowadzi do nierówności

$$m < 22 - a.$$

Przykład 3



Rys. 1

Niech D będzie obszarem w kształcie "domku" (rys. 1). Ponieważ D jest obszarem walcowym $D = G \times (0,2)$ rozdzielając zmienne można pokazać, że założenie (iii) ma budowę

$$m < 6{,}06 - a.$$

Podczas gdy na podstawie wartości własnej obszaru płaskiego G otrzymujemy warunek

$$m < 9{,}03 - a.$$

Dobór przykładów był spowodowany możliwością porównania kryteriów z wynikami wykorzystującymi znajomość minimalnej wartości własnej znanej z literatury dla przyjętych płaskich obszarów. Co prawda kryteria wykorzystujące własności geometryczne obszarów są ostrzejsze, to jednak nakład pracy potrzebny przy ich efektywnym stosowaniu jest znikomy, zwłaszcza że postępowanie nie komplikuje się przy równaniach o zmiennych współczynnikach. Zauważmy, że w tym ostatnim przypadku metody wykorzystujące znajomość operatora półgrupowego są bezużyteczne.

LITERATURA

[1] Elemienty kacziestwiennoj tieorii diffieriencjalnych urawnienij s czastnymi proizwodnymi, Ried. W.Ja. Skorobogatko, Naukowaja Dumka, Kijew, 1972.

[2] Collatz L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963, § 23.5.

[3] Tylikowski A.: Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych Zesz.Nauk.Pol.Śl., Automatyka, z. 20, Gliwice, 1972.

О НЕКОТОРОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРИЗНАКЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО РЯДА

Р е з ю м е

В статье получены достаточные условия локальной стохастической устойчивости нулевого решения параболического уравнения с частными производными второго порядка. Условия устойчивости определены некоторыми характеристиками области и берега области, в которой определено уравнение.

ON SOME GEOMETRIC CRITERION OF STOCHASTIC STABILITY OF A PARTIAL PARABOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER

S u m m a r y

Sufficient conditions of the local stochastic stability of a trivial solution of a partial parabolic equation of the second order has been obtained. The stability criteria are based upon the knowledge of some geometric properties of both the domain and the boundary of the domain in which the equation is being defined.