ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Maciej Tylikowski

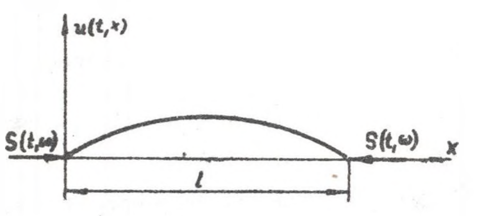
O STABILNOŚCI STOCHASTYCZNEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO, CZĄSTKOWEGO Z PRZESUNIĘTYM ARGUMENTEM, OPISUJĄCEGO DRGANIA POPRZECZNE BELKI ŚCISKANEJ SIŁĄ OSIOWĄ

Streszczenie: Korzystając z bezpośredniej metody Lapunowa, w pracy, analizuje się jednostajną, stochastyczną stabilność zerowego rozwiązania równania różniczkowego, cząstkowego z opóźnieniem. Równaniem tym można opisać drgania poprzeczne belki z opóźnioną sprężystością i ściskanej wzdłużną siłą. Zadanie rozwiązano przy pomocy rozkładu przemieszczenia poprzecznego belki w szereg Fouriera $u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t)w_i(x)$ i otrzymano układ warunków stabilności.

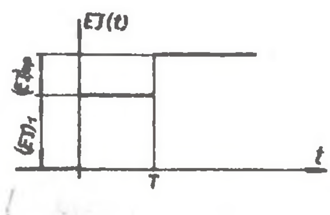
W pracy rozpatrzymy pewne zagadnienia dynamiki belki ściskanej losową siłą wzdłużną $S(t,\omega)$. Układ jest przedstawiony na rysunku 1. O materiale z którego wykonano belkę zakładamy, że charakteryzuje się opóźnioną sprężystością, tzn. sztywność zginania jest opisana następującą funkcją czasu

$$EI(t) = (EI)_1 H(t) + (EI)_{op} H(t-T)$$

i pokazaną na rysunku 2.



Rys. 1



Rys. 2

Równanie różniczkowe opisujące drgania poprzeczne tego układu ma budowę

$$A\rho \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + (EI)_1 \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} + (EI)_{op} \frac{\partial^4 u(t-T,x)}{\partial x^4} +$$

$$+ S(t,\omega) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0,$$

gdzie:

$u(t,x)$ - przemieszczenie poprzeczne belki w chwili czasu $t \geq 0$ i punkcie $0 \leq x \leq l$,

A - pole przekroju belki,

ϱ - gęstość materiału belki,

β - współczynnik tłumienia materiału belki,

$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad -T \leq t \leq 0, \quad 0 \leq x \leq l.$

Funkcja $\varphi(t,x)$ jest ciągle różniczkowalna względem czasu i czterokrotnie ciągle różniczkowalna względem x. Ponadto przyjmujemy jednorodne, deterministyczne warunki brzegowe. Warto również, w tym miejscu, zauważyć, iż stałe $A, \varrho, \beta, T, (EI)_1, (EI)_{op}$ są dodatnie.

Do rozwiązania równania (1) wykorzystujemy rozwinięcie przemieszczenia w szereg Fouriera

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\, w_n(x). \tag{2}$$

Podstawiając (2) do (1), mnożąc obustronnie przez $w_n(x)$ oraz wykorzystując własność ortogonalności współczynników zależnych od x otrzymujemy dla każdego n równanie różniczkowe zwyczajne

$$A\varrho \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dy_n(t)}{dt} + l_{n4} \left[(EI)_1 y_n(t) + (EI)_{op} y_n(t-T)\right] + \\ + l_{n2} S(t,\omega)\, y_n(t) = 0, \tag{3}$$

gdzie

$$l_{nm} = \frac{d^m w_n(x)}{dx^m} \frac{1}{w_n(x)}, \qquad m = 2,4. \tag{4}$$

Jeżeli $S(t,\omega)$ jest normalnym, szerokopasmowym procesem, to równania (3) można aproksymować układem równań Ito [1]

$$d\, y_n(t) = z_n(t)dt,$$

$$d\, z_n(t) = -\left\{a_n y_n(t) + b_n\left[y_n(t) - \int_{-T}^{0} z_n(t+s)ds\right] + c z_n(t)\right\}dt + \\ + g_n y_n(t)\, dw(t,\omega), \tag{5}$$

gdzie

$$a_n = \frac{(EI)_1 l_{n4}}{A\rho}, \quad b_n = \frac{(EI)_{op} l_{n4}}{A\rho}, \quad c = \frac{2\beta}{A\rho}, \quad g_n = -\frac{l_{n2}\sigma_s}{A\rho},$$

σ_s - oznacza intensywność obciążenia wzdłużnego,

$w(t, \omega)$ - jest standartowy proces Wienera,

$$y_n(t) = \eta_n(t) \quad \text{oraz} \quad z_n(t) = \xi_n(t) \quad \text{dla} \quad -T \leqslant t \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Funkcje $\eta_n(t)$ są współczynnikami szeregu Fouriera określonymi na podstawie funkcji początkowej

$$\varphi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t)\, w_n(x), \tag{6}$$

natomiast

$$\xi_n(t) \frac{d\,\eta_n(t)}{dt}. \tag{7}$$

<u>Definicja</u>

Mówimy, że rozwiązanie trywialne $y_n = 0$, $z_n = 0$ jednej pary równań (5) jest jednostajnie, stochastycznie stabilne względem normy, jeżeli prawdziwe jest następujące zdanie logiczne

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{r>0} \|y_n(0), z_n(0), 0\| < r \Longrightarrow P\left\{\sup_{t>0}\|y_n(t), z_n(t), t\| > \varepsilon\right\} < \delta. \tag{8}$$

Do zbadania stabilności rozwiązania zerowego równania (5) wykorzystamy bezpośrednią metodę Lapunowa [2]. Funkcjonał Lapunowa przyjmujemy w następującej postaci

$$V\left[y_n(t), z_n(t), t\right] = \left[y_n(t) + \alpha z_n(t)\right]^2 + \gamma \int_{-T}^{0}\left[\int_{s}^{0} z_n^2(t+s_1)\,ds_1\right]ds. \tag{9}$$

gdzie $\alpha, \gamma > 0$ są stałymi.

Przy obliczaniu pochodnej funkcjonału (10) względem czasu korzystamy z tzw. formuły Ito [2] i po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$
d\,V\left[y_n(t),\ z_n(t),t\right] =
$$

$$
= -\Big(\int_{-T}^{0}\Big\{\frac{\alpha}{2T}\left[2(a_n+b_n)-\alpha g_n^2\right]y_n^2(t)+\frac{1}{T}\left[\alpha^2(a_n+b_n)+\alpha c-1\right]y_n(t)z_n(t)+
$$

$$
+\left[\frac{\alpha(1-\alpha c)}{T}+\gamma\right]z_n^2(t)-\alpha b_n y_n(t)z_n(t+s)-\alpha^2 b_n z_n(t)z_n(t+s)+
$$

$$
+\gamma z_n^2(t+s)\Big\}\,ds\Big)dt+\alpha g_n y_n(t)z_n(t)dw(t,\omega). \tag{10}
$$

Na to, aby forma kwadratowa zmiennych $y_n(t)$, $z_n(t)$, $z_n(t+s)$ występujących w nawiasie wężykowym równania (10) była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, aby minory macierzy współczynników występujących przy zmiennych były większe od zera, czyli

$$
\begin{aligned}
&\gamma>0,\\
&p_2\gamma+q_2>0,\\
&m_3\gamma^2+p_3\gamma+q_3<0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

gdzie

$$
p_2=\frac{2}{T}\alpha\left[2(a_n+b_n)-\alpha g_n^2\right],\qquad q_2=-\frac{\alpha^2 b_n^2}{4},
$$

$$
m_3=\frac{\alpha}{T}\left[2(a_n+b_n)-\alpha g_n^2\right],\qquad q_3=-\frac{\alpha^6 b_n^2 g_n^2}{4T},
$$

$$
p_3=\frac{1}{2T^2}\Big\{2\alpha^2\left[2(a_n+b_n)-\alpha g_n^2\right](1-\alpha c)+\left[\alpha^2(a_n+b_n)+\alpha c-1\right]^2-\alpha^2 b_n^2 T^2\Big\}.
$$

Układ nierówności (11) będzie spełniony, na przykład, gdy

$$
c<1 \quad \text{oraz} \quad \frac{2(a_n+b_n)}{g_n^2}>1,
$$

wówczas

$$
1<\alpha<\min\left[\frac{1}{c},\ \frac{2(a_n+b_n)}{g_n^2}\right],
$$

natomiast

$$\max\left[\gamma_1, \gamma_1'\right] < \gamma < \gamma_2', \tag{12}$$

gdzie

$$\gamma_1 = \frac{\alpha b_n^2 T}{2\left[2(a_n+b_n) - \alpha g_n^2\right]}$$

$$\Delta_3 = p_3^2 - 4m_3 q_3,$$

$$\gamma_1' = -\left(\frac{1}{2}p_3 + \sqrt{\Delta_3}\right), \quad \gamma_2' = -\frac{1}{2}\left(p_3 - \sqrt{\Delta_3}\right).$$

Jeżeli zachodzi (11), forma kwadratowa w równaniu (10) będzie większa lub równa

$$\lambda_m\left[y_n^2(t) + z_n^2(t) + z_n^2(t+s)\right],$$

gdzie

$$\lambda_m = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} \lambda_i.$$

$\lambda_i > 0$ są wartościami własnymi macierzy współczynników przy zmiennych tej formy kwadratowej. Otrzymujemy wówczas

$$d\, V\left[y_n(t), z_n(t), t\right] \leqslant$$

$$\leqslant -\lambda_m\left\{\int_{-T}^{0}\left[y_n^2(t) + z_n^2(t) + z_n^2)t+s)\right]ds\right\}dt + \alpha g_n y_n(t) z_n(t) dw(t,\omega). \tag{13}$$

Nierówność (13) oznacza, że dla dowolnych $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$, z prawdopodobieństwem 1, całka z lewej strony (13) w przedziale od t_1 do t_2 jest mniejsza lub równa całce prawej strony (13) w tym samym przedziale.

Całkujemy obecnie obie strony (13) w przedziale od zera do $\tau_r(t) > 0$ pamiętając, że całka składnika zawierającego $dw(t,\omega)$ rozumiana jest w sensie Ito [3], a następnie obliczamy wartość średnią obu stron nierówności i otrzymujemy

$$E(V\{y_n[\tau_r(t)],\ z_n[\tau_r(t)],\ \tau_r(t)\}) - E\{V[y_n(0),\ z_n(0),0]\} \leqslant$$

$$\leqslant -\lambda_m \int_0^{\tau_r(t)} \left\{E\int_{-T}^{0} [y_n^2(t) + z_n^2(t) + z_n^2(t+s)]ds\right\}dt, \tag{14}$$

przy czym

$$\tau_r(t) = \min[\tau_r, t],$$

τ_r jest momentem pierwszego wyjścia zmiennych $y_n(t)$, $z_n(t)$ z kuli K o promieniu r, określonej za pomocą normy

$$K = \{y_n(t),\ z_n(t):\ \|y_n(t),\ z_n(t),\ t\| < r\}. \tag{15}$$

Oprócz tego na mocy (10)

$$E\{V[y_n(0),\ z_n(0),\ 0]\} = [y_n(0) + \alpha z_n(0)]^2 + \vartheta\int_{-T}^{0}[\int_{s}^{0} y_n^2(s_1)ds_1]ds \leqslant$$

$$\leqslant c\|\eta\|_T^2, \tag{16}$$

gdzie

$$c = (1+\alpha)^2 + \frac{\vartheta T^2}{2},$$

$$\|\eta\|_T = \max_{-T\leqslant t\leqslant 0}\{\max[\eta_n(t),\ \xi_n(t)]\}.$$

Ponieważ

$$V[y_n(t),\ z_n(t),\ t] \geqslant 0 \tag{17}$$

wynika stąd, że

$$E(V\{y_n[\tau_r(t)],\ z_n[\tau_r(t)],\ \tau_r(t)\}) \geqslant 0 \tag{18}$$

oraz

$$E(V\{y_n[\tau_r(t)],\ z_n[\tau_r(t)],\ \tau_r(t)\}) \leqslant E\{V[y_n(0),\ z_n(0),\ 0]\}. \tag{19}$$

Widzimy więc, że funkcjonał (9) jest supermartyngałem względem σ -ciała zdarzeń generowanych zdarzeniami, które zaszły dla chwili $t<0$.

Jako normę w naszych rozważaniach możemy przyjąć

$$\| y_n(t), z_n(t), t \| = \sqrt{V[y_n(t), z_n(t), t]}. \tag{20}$$

Z relacji (9), (11) lub (12) oraz od (14) do (20) wynika na podstawie [4], że zgodnie z definicją (8) rozwiązanie zerowe równania (5) jest jednostajnie stochastycznie stabilne.

Uwzględniając (2) zauważamy, iż rozwiązanie trywialne $u(t,x) = 0$ równanie (1) będzie jednostajnie, stochastycznie stabilne, jeżeli dla każdego n będą spełnione nierówności (11) lub (12).

Przykład

Rozpatrzmy belkę zamocowaną na jej końcach przegubowo. Wówczas warunki brzegowe będą następujące:

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

Dla takich warunków

$$w_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

$$\lambda_{n2} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad \lambda_{n4} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4.$$

Z zależności (5) i nierówności (13) wynika, że na to, aby rozpatrywany układ był jednostajnie stochastycznie stabilny wystarczy, aby

$$\frac{2\beta}{A\varrho} < 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{2\left[(EI)_1 + (EI)_{op}\right]}{\sigma_s^2} > 1.$$

Dalszym krokiem w rozważaniach stabilności układów z opóźnioną sprężystością może być uwzględnienie większej liczby członków z opóźnieniem. Prowadzi to, jednak do znacznie utrudnionej analizy, aczkolwiek schemat postępowania przy rozpatrywaniu takiego zagadnienia nie ulega większym zmianom.

LITERATURA

[1] Skalmierski B., Tylikowski A.: Procesy stochastyczne w dynamice, PWN Warszawa 1972.

[2] Skalmierski B., Tylikowski A.: Stabilność układów dynamicznych, PWN, Warszawa 1973.

[3] Elsgolc L.E., Norkin S.B.: Wwiedienie w tieoriju diffieriencialnych urawnienij s otkłonjajuszczim argumientom, Nauka, Moskwa 1971.

[4] Chaśminskij R.Z.: Ustojcziwost' sistiem diffieriencialnych urawnienij pri słuczajnych wozmuszienijach ich paramietrow, Nauka, Moskwa 1969.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ СЖИМАЕМОЙ ОСЕВОЙ СИЛОЙ

Р е з ю м е

Применяя непосредственный метод Ляпунова, анализируется стохастическая устойчивость нулевого дифференциального решения, с частными производными уравнения с последействием. Колебания балки с упругим последействием могут исполнять это уравнение. Задача решена с помощью разложения перемещения в ряд фурье $u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t)\, w_i(x)$ и получена система условий устойчивости.

ON THE STABILITY OF PARTIAL STOCHASTIC EQUATION WITH RETARDATION DESCRIBING TRANSVERSAL DISPLACEMENTS OF A BEAM COMPRESSED BY AN AXIAL FORCE

S u m m a r y

Using the Liapunov functional approach, the mean square stability of the trivial solution of partial differential equation with retardated argument describing transversal displacements beam with elastic retardation has been analysed. Based upon representation of solution in the form $u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t)w_i(x)$, the set of sufficient conditions of stability of trivial solution was obtained.