ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: Matematyka-Fizyka z. 28 Nr kol. 465

Bogdan Wilk

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE UKŁADÓW KRATOWO-BELKOWYCH

Streszczenie: W niniejszej pracy zajmować się będziemy zagadnieniami optymalizacji, odnoszącymi się do tzw. układów kratowo-belkowych, przyjmując jako funkcję celu objętość takiego układu; z funkcji ograniczających uwzględniać będziemy: naprężenia w prętach i belkach, przemieszczenia węzłów, a także ugięcia wybranych punktów osi belki; takie postawienie problemu prowadzi do zagadnień programowania nieliniowego.

1. Wstęp

Liczba publikacji poświęcona problemom optymalizacji konstrukcji przekroczyła już 2500 (rok 1972); rocznie ukazuje się ich 400, co stanowi 2% prac poświęconych problemom mechaniki, por. [16]. Wyczerpujące omówienie tych wyników - do roku 1972, znajduje się w monografiach [1,2,4,5,6] i pracach przeglądowych [7,8,9,10,11,12,13,14,15,16]. Omówienie wyników badaczy polskich, ze szczególnym uwzględnieniem konstrukcji budowlanych, znajduje się w pracy A.M. Brandta [17]. Zagadnienie optymalizacji konstrukcji powłokowych omawiane są w pracy M. Życzkowskiego [19], a przy uwzględnieniu pola temperatur - w pracy S. Borkowskiego [20]. Przegląd problemów optymalizacyjnych z uwzględnieniem techniki cyfrowej przedstawiono w pracy Z. Leśniaka i G. Rakowskiego [22]; w literaturze dotyczącej optymalizacji nieliczna grupa prac odnosi się do problemów, w których uwzględnia się pola temperatur, por. [21].

Omówienie prac, z zagadnień mechaniki ośrodków odkształcalnych, w których stosowano metody sterowania optymalnego, znajduje się w publikacjach G. Szefera [27] i J.J. Telegi [28]. Problemom teoretycznym optymalizacji poświęcone są prace I. Gumowskiego, C. Miry [3], H.M. Wagnera [25], D.G. Luenbergera [26]. Podstawowe elementy programowania nieliniowego wyłożone są w pracach [23],[24]. Metody rozwiązywania układów statycznych, analizowanych tutaj, podane są w pracy W. Nowackiego [18]. Powyżej podano przegląd publikacji jakie ukazały się w latach 1973-1975.

W punkcie drugim pracy sformułowano zadanie, natomiast w trzecim przytoczono metodę rozwiązywania danego problemu. Przedstawiony w pracy algorytm rozwiązywania zadania jest uogólnieniem metod stosowanych przy rozwiązywaniu kratownic, por. pracę W.P. Siłakowa [30], a także uwagi odnoszące się do tych problemów, przedstawiono w pracy P.I. Niordsona, S. Pedersena, [16].

2. Sformułowanie zadania

W danym układzie kratowo-belkowym należy tak dobrać przekroje prętów, oznaczonych numerami 1,2,...,n i przekroje belek n + 1,...,n + m, aby;

1° objętość tego układu była najmniejsza;

2° naprężenia występujące we wszystkich prętach i belkach nie przekraczały wartości dopuszczalnych "k_r";

3° przemieszczenia węzłów i maksymalne ugięcie belki były niewiększe od dopuszczalnych "q".

Należy zatem znaleźć:

$$\min f(\mathbf{F}) = \min \left(\sum_{i=1}^{n+m} F_i \cdot l_i \right), \quad \mathbf{F} = (F_1,\dots,F_{n+m}), \tag{2.1}$$

przy ograniczeniach

$$\Psi_j(\mathbf{F}) \equiv \frac{|N_j|}{\beta_j \; F_j} - k_r \leqslant 0, \quad (j=1,\dots,n), \tag{2.2}$$

$$\Psi_j(\mathbf{F}) \; \frac{\left| M_{g_j} \pm \frac{N_j}{\beta_j F_j} \right|}{W_j} - k_r \leqslant 0, \quad (j=n+1,\dots,n+m), \tag{2.3}$$

$$\Psi_{j_w}(\mathbf{F}) \equiv \left| \delta_{j_w} \right| - q \leqslant 0, \quad (w=1,\dots,w_1 - \text{liczba węzłów}), \tag{2.4}$$

$$\Psi_{j_b}(\mathbf{F}) \equiv \left| \delta_{j_b} \right| - \bar{q} \leqslant 0, \quad (b=1,\dots,m - \text{liczba belek}). \tag{2.5}$$

Funkcja $f(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{n+m} F_i \cdot l_i$ określa objętość układu, natomiast symbole F_i, l_i, β_j, N_j określają, odpowiednio, pole przekroju, długość, współczynnik wyboczenia, siłę podłużną; M_{g_j} - maksymalny moment zginający; W_j - wskaźnik przekroju na zginanie; δ_{j_w}, δ_{j_b} - przemieszczenia liniowe węzłów i belek;

k_r, q, $\bar{q}$ - naprężenie dopuszczalne, przemieszczenia dopuszczalne.

Tak sformułowane zagadnienie jest zadaniem programowania nieliniowego, gdzie funkcja celu (2.1) jest funkcją liniową, zaś ograniczenia (2.2-2.5) są funkcjami nieliniowymi.

3. Metoda rozwiązywania

Zagadnienie przedstawione w punkcie 2 możemy zapisać następująco:

$$\min\Big\{f(\mathbf{F}) : \psi_j(\mathbf{F})\leqslant 0, \quad j=1,\dots,n+m; \quad \psi_{j_w}(\mathbf{F})\leqslant 0,$$

$$w=1,\dots,w_1; \quad \psi_{j_b}(\mathbf{F})\leqslant 0, \quad b=1,\dots,m; \quad F_i\geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$i=1,\dots,n+m; \quad \mathbf{F}(F_1,\dots,F_{n+m})\in E^{n+m}\Big\}, \text{ gdzie}$$

funkcje f i ψ są funkcjami wypukłymi klasy C^1 w przestrzeni E^{n+m}. Powyższe zagadnienie rozwiążemy metodą kierunków dopuszczalnych [24]; metoda ta pozwoli nam dane zagadnienie programowania nieliniowego sprowadzić do zagadnienia programowania liniowego, por. [29]. Przez zbiór punktów dopuszczalnych rozumiemy zbiór

$$Q=\Big\{\mathbf{F}=\mathbf{F}(F_1,\dots,F_{n+m})\in E^{n+m} : \psi_j\leqslant 0, \ \psi_{j_w}\leqslant 0, \psi_{j_b}\leqslant 0\Big\}, \tag{3.2}$$

gdzie $\mathbf{F}$ jest punktem dopuszczalnym.

Algorytm rozwiązania

1. Znajdujemy siły wewnętrzne w prętach i belkach oraz przemieszczenia węzłów i przemieszczenia liniowe belek. Jako początkowy punkt dopuszczalny przyjmujemy punkt $\mathbf{F}^{(o)}$ o współrzędnych $F_1^{(o)}=F_2^{(o)}=\dots=F_n^{(o)}$ oraz $F_{n+1}^{(o)}=\dots=F_{n+m}^{(o)}$.

Przekroje $F_i^{(o)}$ należy tak wyznaczyć, aby co najmniej jedno z naprężeń występujących w rozpatrywanych prętach czy belkach znajdowało się w przedziale $[k_r-\delta_\sigma, k_r+\delta_\sigma]$, tj.

$$\sigma_j^{(o)}\in\left[k_r-\delta_\sigma, \ k_r+\delta_\sigma\right] (j=1,\dots,n+m),$$

gdzie δ_σ jest zadaną dodatnią liczbą (np. $\delta_\sigma\leqslant 0{,}05\,k_r$). Dla funkcji $\psi_j(\mathbf{F}^{(o)})=\left|\sigma_j^{(o)}\right|-k_r$ mogą zatem zajść następujące możliwości:

$$\psi_j(\mathbf{F}^{(o)})\in\left[-\delta_\sigma,\delta_\sigma\right] \text{ lub } \psi_j(\mathbf{F}^{(o)})\notin\left[-\delta_\delta,\delta_\delta\right]. \tag{3.3}$$

Podobnie postępujemy z przemieszczeniami, tzn. przyjmujemy dodatnie liczby δ_δ i $\delta_{\bar{\delta}}$ (np. $\delta_\delta\leqslant\frac{1}{6}\cdot q$). Ze względu na wartości funkcji $\psi_{j_w}(\mathbf{F}^{(o)})$ i $\psi_{j_b}(\mathbf{F}^{(o)})$ mogą zajść przypadki:

$$\psi_{j_w}(\mathbf{F}^{(o)}) \in \left[-\delta_{\delta}, \delta_{\delta}\right] \text{ lub } \psi_{j_w}(\mathbf{F}^{(o)}) \notin \left[-\delta_{\delta}, \delta_{\delta}\right] \tag{3.4}$$

podobnie

$$\psi_{j_b}(\mathbf{F}^{(o)}) \in \left[-\delta_{\bar{\delta}}, \delta_{\bar{\delta}}\right] \text{ lub } \psi_{j_b}(\mathbf{F}^{(o)}) \notin \left[-\delta_{\bar{\delta}}, \delta_{\bar{\delta}}\right]. \tag{3.5}$$

2^o Ustalamy zbiór tych funkcji ψ_j, ψ_{j_w}, ψ_{j_b}, dla których punkt $\mathbf{F}^{(o)}(F_1^{(o)},\dots,F_{n+m}^{(o)})$ leży na hiperpowierzchni $\psi_k(\mathbf{F}^{(o)}) = 0$, gdzie $k = j$, j_w lub j_b (na brzegu obszaru dopuszczalnego). Zakładamy przy tym, że punkt $\mathbf{F}(o)$ spełnia warunek $\psi_k(\mathbf{F}^{(o)}) = 0$, jeśli

$$-\delta \leqslant \psi_k(\mathbf{F}^{(o)}) \leqslant \delta, \tag{3.6}$$

gdzie przez δ należy rozumieć δ_{δ}, δ_{δ} lub $\delta_{\bar{\delta}}$.

Niech

$$-\delta \leqslant \psi_{j\alpha}(F_1^{(o)},\dots,F_{n+m}^{(o)}) \leqslant \delta \quad (\alpha = 1,\dots,\alpha_1), \tag{3.7}$$

natomiast

$$\psi_j(F_1^{(o)},\dots, F_{n+m}^{(0)}) \leqslant -\delta \qquad (j \neq j_1,\dots,j_{\alpha_1}).$$

3^o Określamy kierunek poprawiający wyznaczony przez wektor $\mathbf{s}^{(o)}(s_1,\dots,s_{n+m})$. W tym celu należy rozwiązać problem programowania liniowego:

$$\min\left\{r : (\nabla f(\mathbf{F}^{(o)}), \mathbf{s}^{(o)}) \leqslant r, \quad (\nabla \psi_{j_\alpha}(\mathbf{F}^{(o)}), \mathbf{s}^{(o)}) \leqslant r, \ \|\mathbf{s}^{(o)}\| \leqslant 1\right\}, \tag{3.8}$$

gdzie

$\|\mathbf{s}^{(o)}\| = \max\left\{|s_i| : i = 1,\dots,n+m\right\}$, $(\nabla f(\mathbf{F}^{(o)}), \mathbf{s}^{(o)})$ oznacza iloczyn skalarny gradientu funkcji $f(\mathbf{F}^{(o)})$ i wektora $\mathbf{s}^{(o)}$.

Problem (3.8) jest zatem zagadnieniem minimalizacji formy $\Omega = r$ przy ograniczeniach

$$l_1 \cdot s_1^{(o)} + \dots + l_{n+m} \cdot s_{n+m}^{(o)} \leqslant r, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial\psi_{j_\alpha}(\mathbb{F}^{(o)})}{\partial F_1^{(o)}}\cdot s_1^{(o)}+\ldots+\frac{\partial\psi_{j_\alpha}(\mathbb{F}^{(o)})}{\partial F_{n+m}^{(o)}}\cdot s_{n+m}^{(o)} < r\ (\alpha=1,\ldots,\alpha_1), \tag{3.10}$$

$$\left|s_k^{(o)}\right| \leqslant 1 \quad (k=1,\ldots\ n+m). \tag{3.11}$$

Ze względu na to, że funkcje $\psi_{j_\alpha}(\mathbb{F}^{(o)})$ są funkcjami uwikłanymi przyjmujemy uproszczenie:

$$\frac{\partial\psi_{j_\alpha}(\mathbb{F}^{(o)})}{\partial F_k^{(o)}} \approx \frac{\Delta\psi_{j_\alpha}(\mathbb{F}^{(o)})}{\Delta F_k^{(o)}} \quad (k=1,\ldots,n+m),$$

gdzie $\Delta F_k^{(o)}$ jest małym przyrostem pola przekroju.
Rozwiązując problem minimalizacji formy $\Omega = r$ przy ograniczeniach (3.9), (3.10) i (3.11) metodą sympleks [29], otrzymamy wektor $\mathbb{s}^{(o)}(s_1^{(o)},\ldots s_{n+m}^{(o)})$ określający nam kierunek poprawiający.
W ten sposób otrzymamy nowy punkt dopuszczalny

$$\mathbb{F}^{(1)}(F_1^{(o)} + s_1^{(o)}\cdot t^{(1)},\ F_2^{(o)} + s_2^{(o)}\cdot t^{(1)},\ldots,F_{n+m}^{(o)} + s_{n+m}^{(o)}\cdot t^{(1)}). \tag{3.12}$$

4° Znajdujemy takie $t^{(1)}$, które spełnia warunek

$$f(\mathbb{F}^{(1)}) = \min\Big\{f(\mathbb{F}^{(o)}) : \psi_j(\mathbb{F}^{(1)}) \leqslant 0,\quad j=1,\ldots,n+m; \tag{3.13}$$
$$\psi_{j_w}(\mathbb{F}^{(1)}) \leqslant 0,\quad w=1,\ldots,w_1;\quad \psi_{j_b}(\mathbb{F}^{(1)}) \leqslant 0,\quad b=1,\ldots,m\Big\}.$$

5° Wyznaczamy przekroje $F_i^{(1)}$ i znajdujemy nowy kierunek poprawiający $\mathbb{s}^{(1)}$ z punktu $\mathbb{F}^{(1)}(F_1^{(1)},\ldots,F_{n+m}^{(1)})$ jak w punkcie 3° powyższego algorytmu, i.t.d. Obliczenia prowadzimy do tego miejsca, w którym

$$\left|f(\mathbb{F}^{(k+1)}) - f(\mathbb{F}^{(k)})\right| < \varepsilon\ (\varepsilon \text{ - dana dodatnia liczba}).$$

4. Wnioski

Opisany w punkcie 3 algorytm oparty na metodzie kierunków dopuszczalnych jest zbieżny do punktu optymalnego

$\bar{F}(\bar{F}_1,\ldots,\bar{F}_{n+m})$ jeśli spełnione są założenia:

a) f, ψ_j, ψ_{j_w}, ψ_{j_b} są funkcjami wypukłymi klasy C^1 określonymi w przestrzeni E^{n+m};

b) istnieje punkt $F(F_1,\ldots F_{n+m}) \in Q$ taki, że $\psi_j(F)<0$ $(j = 1,\ldots,n+m)$, $\psi_{j_w}(F)<0$ $(w=1,\ldots,w_1)$, $\psi_{j_b}(F) < 0$ $(b=1,\ldots,m)$;

c) dla każdej liczby rzeczywistej r, $\left\{F \in Q : f(F) \leq r\right\}$ jest zbiorem ograniczonym.

Ze względu na skomplikowany charakter funkcji ψ_j, ψ_{j_w}, ψ_{j_b} nie jesteśmy w stanie spełnić wymagania założenia (a), dlatego też zbieżność opisanego w punkcie 3 algorytmu stoi pod znakiem zapytania. Podamy jednak w następnej pracy przykład optymalizacji układu kratowo-belkowego z załączeniem programu na maszynę cyfrową.

LITERATURA

[1] Hemp W.S.: Optimum structures, Oxford 1973, 123 s.

[2] Penescu C, Ionescu V., Rosinger E.: Procese optimale, Bucaresti,1970 334 s.

[3] Gumowski I., Mira C.: L'optimasation la thérie et les problémes, Dunod, Paris 1970, 327 s.

[4] Kaliszky S.: Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych, Wrocław 1968, 555 s.

[5] Cziras A.A.: Teoria optymalizacji w predielnom analizje twierdowo deformijujemogo tieła, Wilno 1971, 123 s.

[6] Cankow I.C.: Optymizacjonni isledowanija w obłasttanna mechanikata na płasticznostta, Technika, Sofija 1972, 100 s.

[7] Wasiutyński Z., Brandt A.: The present state of knowledge in the field of optimum design of structures, Appl.Mech.Rev., 5, 16 (1963), 341-350.

[8] Sheu C.Y., Prager W.: Recent developments in optimal structural design, Appl.Mech. Rev. 10, 21 (1968), 985-992.

[9] Barnett R.L.: Servey of optimum structural desing, Exper. Mech., 1966, 19A-26A.

[10] Pope G.G., Schmit L.A.: Structural design applications of mathematical programing techniques, Agardograph, AGARD, 149, 1971.

[11] Gerard G.G.: Optimum structural design concepts for aerospace vehicles, J. Spacecraft, 1, 3(1966), 5-18.

[12] Save M.A.: Some aspects of minimum-weight design, Eng plast. Campr. Univ.Press, 1968.

[13] Prager W.: Optimization of stuctural design, J. Optimiz. Theory a. Appl., 1, 6 (1970), 1-21.

[14] Prager W.: Optimality criteria in structural design, AGARG Raport, 588, 1971.

[15] Niordson F.I., Pedersen P.: A review of optimal structural design, Rept Dep.Center Appl. Math. a. Mech., 31, 1971, 33 s.

[16] Niordson F.I., Pedersen P.: Obzor isljedowani po optymalnomu projektirowaniju konstrukcji, Mechanika, pier. sb, pier. in. st., 2, 1973, 136-157.

[17] Brandt A.M.: Optymalizacja konstrukcji budowlanych w pracy: "Ogólna teoria konstrukcji", II Kongres Nauki Polskiej, Politechnika Krakowska, Kraków 1973, 5-42.

[18] Nowacki W.: Mechanika budowli, t. II, PWN Warszawa 1960, 844 s.

[19] Życzkowski M.: Optymalizacja konstrukcji powłokowej, Sympozjum: "Konstrukcje powłokowe - teoria i zastosowania" Kraków 25-27.04. 1974, 71 s.

[20] Borkowski S.: Współczesne problemy i kierunki rozwojowe termomechaniki powłok, Sympozjum: "Konstrukcje powłokowe - teoria i zastosowanie", Kraków 25-27.04.1974.

[21] Borkowski S.: Niektóre problemy optymalizacji konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu wpływu pola temperatur, Kier.rozw.konstr.met.t. I Warszawa 1970, 539-541.

[22] Leśniak Z., Rakowski G.: Kierunki rozwoju i problemy mechaniki komputerowej w Polsce, Sympozjum: "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji", Poznań, 17-18.05.1973, 57 s.

[23] Zangwill W.I.: Programowanie nieliniowe, PWN Warszawa 1974, 351 s.

[24] Dubnicki W., Zorychta K.: Metody programowania wypukłego, Wyd.Uniw. Warsz., 1972, 171 s.

[25] Wagner H.M.: Principles of operations research, Prent. Hall, New Jersey 1969, 488 s.

[26] Luenberger D.G.: Teoria optymalizacji, Warszawa 1974.

[27] Szefer G.: Sterowanie optymalne w mechanice ciał odkształcalnych, Sympozjum "Optymalizacja w Mechanice", PTMTS Gliwice, Beskid Śląski, luty 1975.

[28] Telega J.J.: Zastosowanie zasady maksimum Pontriagina do zagadnień optymalizacji konstrukcji, Sympozjon "Optymalizacja w Mechanice, PTMTS Gliwice, Beskid Śląski luty 1974, 259-271.

[29] Gass S.I.: Programowanie liniowe, PWN Warszawa 1973.

[30] Siłakow W.P.: Rasczot staticzeski nieopriedielimych form z obespieczienijem najmieńszjego objema metodom skorjejszego spuska, Izw.Wuzow, Stroitelstwo i architektura, 12, 1971, str. od 37 do 40.

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВО-БАЛКОВЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье разрабатывается проблема оптимализации стержневобалковых систем и объём этих систем. Функцией ограничивающей её является напряжение в прутах и балках, а также перемещение узлов. Проблема может быть решена методом нелинейного програмирования.

THE OPTIMAL SHAPING OF LATTICE-BEAM SYSTEMS

S u m m a r y

An optimization problem in lattice-beam systems (in which a volume is taken for purpose function has been considered in this paper. As limiting functions are taken the strains in the rods and beams, the displacement in the joints and also the bends in some points of the bar. Such an attitude to this question leads to the problems of nonlinear programing.