

Robert Wójcik

WARIACYJNO-RÓŻNICOWA METODA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ BRZEGOWYCH  
NIELINIOWEJ TEORII SKRĘCANIA PRĘTÓW

**Streszczenie:** W niniejszej pracy przedstawiono metodę minimalizacji funkcjonału, określającego sprzężoną energię potencjalną skręcanego pręta, dla którego modelem jest nieliniowy ośrodek Kauderera. Do zminimalizowania tegoż funkcjonału posłużono się metodą wariacyjno-różnicową przy wykorzystaniu algorytmu metody elementów skończonych.

## 1. Wstęp

Pewne szczególne problemy nieliniowe, odnoszące się do skręcania prętów zostały opracowane i przedstawione w pracach: J.A. Barga, W.I. Miszewa [1], (pręt o przekroju prostokątnym); S. Borkowskiego [2], (algorytm iteracyjnego rozwiązania zagadnień brzegowych teorii skręcania prętów o przekroju wielospójnym); H. Kauderera [3], (przekrój kołowy i eliptyczny); O.S. Kosmodamianskiego, N.E. Zimy [4], (przekrój eliptyczny z dwoma wtrąceniami); N.E. Zimy [6] (przekrój eliptyczny z ekscentrycznym, walcowym wycięciem).

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest minimalizacja nieliniowego funkcjonału, który przedstawia sprzężoną energię potencjalną skręcanego pręta, o dowolnym przekroju jednospójnym przy założeniu, że modelem fizycznym jest nieliniowy ośrodek Kauderera. Strona statyczna i geometryczna zagadnienia przyjęta jest zgodnie z klasyczną, de Saint Venatowską teorią skręcania. Postać takiego funkcjonału wprowadzono w pracy [5]. Do rozwiązania wymienionego zadania wariacyjnego zastosowano metodę wariacyjno-różnicową (elementu skończonego) przy czym jako dziedzinę rozważanego funkcjonału przyjęto klasę funkcji liniowych, w podobozzarach. W efekcie rozważań uzyskano układ nieliniowych równań algebraicznych określający rozwiązanie zadania.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Należy znaleźć taką funkcję  $\bar{F}(X, Y)$ ;  $(X, Y) \in \Gamma$ , dla której wartość funkcjonału

$$\begin{aligned} \bar{V}[\bar{F}] = & \frac{1}{2} G \Theta^2 \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right)^2 \right] \left\{ 1 + \frac{3}{8} \Theta^2 \nu_2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\} - \\ & - 4 \bar{F} \Big] dX dY, \end{aligned} \quad (2.1)$$

przy zadanym momencie skręcającym

$$K = 2G \Theta \int_{\Gamma} \bar{F}(X, Y) dX dY, \quad (2.2)$$

jest najmniejsza.

W (2.1), (2.2)  $\bar{F}(X, Y)$  przedstawia funkcję naprężeń,  $\Theta$  - jednostkowy kąt skręcania,  $\Gamma$  - zbiór punktów przekroju pręta,  $K$  - moment skręcający, działający w przekroju brzegowym z = 1;  $G$ ,  $\nu_2$  - stałe materiałowe, wyznaczone doświadczalnie.

### 3. Wariacja funkcjonału

Istotą stosowanej metody minimalizacji funkcjonału jest rozważanie wariacji w podoboznaczach trójkątnych  $\Gamma_1$ , na które został podzielony obszar  $\Gamma$ , a następnie wykorzystanie otrzymanych wyników do obliczenia wariacji funkcjonału w całym obszarze  $\Gamma$ .

Wariacja funkcjonału (2.1) w obszarze  $\Gamma$  wynosi:

$$\begin{aligned} \delta[\bar{V}] = & 2G \Theta^2 \int_{\Gamma} \left[ \left[ \delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} + \delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right] \left\{ 1 + \frac{3}{4} \Theta^2 \nu_2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\} - \right. \\ & \left. - 2 \delta \bar{F} \right] dX dY. \end{aligned} \quad (3.1)$$

W związku z powyższym założeniem mamy:

$$\begin{aligned} \delta[\bar{V}] = & \sum_1 G \Theta^2 \int_{\Gamma_1} \left[ \left[ \delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} + \delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right] \left\{ 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{4} \Theta^2 \nu_2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\} - 2 \delta \left( \bar{F} \right) \right] dX dY \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

gdzie  $n$  jest liczbą trójkątów podzielonego obszaru  $\Gamma$ .

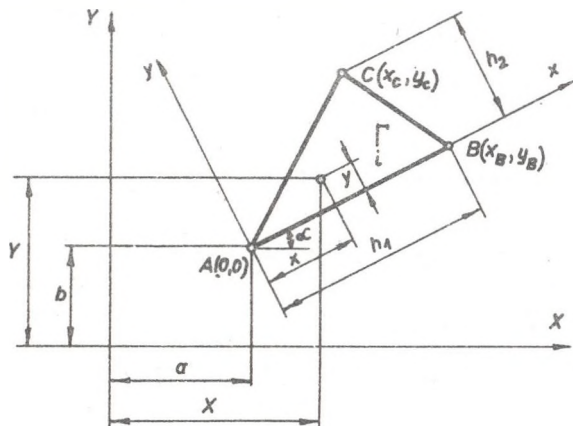
Zgodnie z (3.2) w obszarze trójkątnym  $\bar{\Gamma}_1$  wariacja  $\delta \bar{U}_1$  jest postaci:

$$\delta \left[ \bar{U}_1^* \right] = G1 \Theta^2 \int_{\bar{\Gamma}_1} \left[ \left[ \delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} + \delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right] \left\{ 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + k \left[ \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\} - 2 \delta \bar{F} \right] dXdY, \quad (3.3)$$

gdzie

$$k = \frac{3}{4} \Theta^2 \bar{U}_2.$$

Z obszarem trójkątnym  $\bar{\Gamma}_1$  związane lokalny układ współrzędnych, przyjmując oznaczenia jak na rys. 1.



Rys. 1

Zgodnie z rys. 1 mamy

$$x_B = h_1, \quad y_B = 0; \\ 0 \leq x_C \leq h_1, \quad y_C = h_2. \quad (3.4)$$

Obszar  $\bar{\Gamma}_1$  w lokalnym układzie współrzędnych, można opisać układem nierówności

$$0 \leq y \leq h_2, \\ \frac{x_C}{h_2} y \leq x \leq x_B + \beta y, \quad (3.5)$$

gdzie

$$\beta = \frac{x_C - x_B}{h_2}.$$

Związki między współrzędnymi dla punktów  $\Gamma_i$  mają postać

$$X = a + x \cos\alpha - y \sin\alpha,$$

$$y = b + x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

$$x = (X-a) \cos\alpha + (Y-b) \sin\alpha,$$

(3.6)

$$y = -(X-a) \sin\alpha + (Y-b) \cos\alpha.$$

Wykorzystując pierwszy ze związków (3.6), funkcję  $\bar{F}_i(X, Y)$  przedstawimy w postaci:

$$\bar{F}_i(X, Y) = \bar{F}_i(a + x \cos\alpha - y \sin\alpha, b + x \sin\alpha + y \cos\alpha) = F_i(X, y); \quad (3.7)$$

pochodne tej funkcji określone są wzorami

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial X} = \frac{\partial F_i}{\partial x} \cos\alpha - \frac{\partial F_i}{\partial y} \sin\alpha \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial Y} = \frac{\partial F_i}{\partial x} \sin\alpha + \frac{\partial F_i}{\partial y} \cos\alpha.$$

Funkcja  $F_i(x, y)$ , zgodnie z przyjętym założeniem o liniowości, ma postać

$$F_i(x, y) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}x + \alpha_{i3}y \quad (3.9)$$

lub w zapisie macierzowym

$$F_i(x, y) = Q_i \cdot \alpha_i, \quad (3.10)$$

gdzie

$$Q_i = [1 \mid x \mid y], \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{bmatrix}.$$

Oznaczając wartości funkcji  $F(x, y)$  w punktach A, B, C odpowiednio przez  $F_1, F_2, F_3$ , uzyskujemy z (3.9).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & h_1 & 0 \\ 1 & x_c & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Równość (3.11) zapiszemy w postaci

$$\mathbf{A}_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{F}_i, \quad (3.11')$$

gdzie

$$\det \mathbf{A}_i = h_1 \cdot h_2 \neq 0.$$

Z (3.11') wynika

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{F}_i, \quad (3.12)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1} & 0 \\ \frac{x_c}{h_1 h_2} - \frac{1}{h_2} & -\frac{x_c}{h_1 h_2} & \frac{1}{h_2} \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając w (3.10)-(3.12) otrzymujemy

$$F_i(xy) = \mathbf{Q}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{F}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i = (\mathbf{B}_i \mathbf{F}_i)^T = \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_i^T, \quad (3.13)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{A}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{h_1} & -\frac{y}{h_2} (1 - \frac{x}{h_1}) \\ \frac{x_c}{h_1} - \frac{x_c}{h_1} \frac{y}{h_1} & \frac{y}{h_2} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Wyrażając poszczególne wielkości występujące w wyrażeniu podcałkowym (3.2) i uwzględniając związki (3.13), (3.8) uzyskamy

$$\delta \bar{F}_i = (\delta F)_i^T \mathbf{B}_i^T,$$

$$\delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{X}} \right) = (\delta F)_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial y} \sin \alpha \right], \quad (3.15)$$

$$\delta \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Y}} \right) = (\delta F)_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial y} \cos \alpha \right],$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{X}} = \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \sin \alpha \right) \mathbf{F}_i,$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Y}} = \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \cos \alpha \right) \mathbf{F}_i.$$

Podstawiając (3.15) do (3.3) i przechodząc do całek iterowanych, przy uwzględnieniu (3.5) otrzymujemy

$$\delta \left[ \bar{U} \right]_i = G1 \Theta^2 (\delta F)_i^T \int_0^{h_2} \int_{\frac{x_c}{h_2} y}^{x_B + \beta y} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) \left[ 1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + k \left( \frac{F_2 - F_1}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{F_3 - F_1}{h_2} - \frac{x_c}{h_2} \frac{F_2 - F_1}{h_1} \right)^2 \right] \mathbf{F}_i - 2 \mathbf{B}^T \right\} dx dy$$

z (3.13) wynika

$$\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = \frac{2}{h_1 h_2} \mathbf{H}_i \quad (3.17)$$

gdzie  $\mathbf{H}_i$  jest macierzą sztywności elementu, postaci

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{2} \frac{h_1}{h_2} \begin{bmatrix} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \left( 1 - \frac{x_c}{h_1} \right)^2 & - \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{x_c}{h_1} \left( 1 - \frac{x_c}{h_1} \right) & - \left( 1 - \frac{x_c}{h_1} \right) \\ - \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{x_c}{h_1} \left( 1 - \frac{x_c}{h_1} \right) & \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{x_c}{h_1} \right)^2 & - \frac{x_c}{h_1} \\ - \left( 1 - \frac{x_c}{h_1} \right) & - \frac{x_c}{h_1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \quad (3.17)$$

Obliczając całkę (3.16) i przyjmując oznaczenie

$$\kappa_i = k \left[ \left( \frac{F_2 - F_1}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{F_3 - F_1}{h_2} - \frac{x_c}{h_2} \frac{F_2 - F_1}{h_1} \right)^2 \right]$$

otrzymujemy:

$$\delta \left[ \overset{*}{U} \right]_i = G_i \Theta^2 (\delta F)_i^T \left[ \begin{matrix} H_i(1+\kappa) & \mathbf{F} - \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{matrix} \right], \quad (3.18)$$

gdzie

$$\mathbf{I}_i = 2 \int_0^{h_2} dy \int_{\frac{x_c}{h_2} y}^{x_B + h_2 y} \mathbf{B}^T dx = \frac{h_1 h_2}{3} [1; 1; 1]^T \quad (3.19)$$

Wyrażenie (3.18) przedstawia wariację sprzężonej energii potencjalnej układu, odpowiadającą podobszarowi  $\Gamma_i$ .

Wariacja sprzężonej energii potencjalnej układu ma postać

$$\delta \left[ \overset{*}{U} \right] = G_i \Theta^2 (\delta F)^T (\mathbf{H} \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (3.20)$$

przy czym

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_L + \mathbf{H}_N; \quad (3.21)$$

gdzie  $\mathbf{H}$  - macierz sztywności układu,  $\mathbf{H}_N$  jest macierzą o elementach zawierających  $\kappa$ ,  $\mathbf{H}_L$  - macierz blokowa utworzona z  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$  - macierz niewiadomych w obszarze  $\Gamma_i$ ,  $\mathbf{I}$  macierz utworzona z  $\mathbf{I}_i$ .

Ponieważ  $\delta \left[ \overset{*}{U} \right] = 0$ , a  $(\delta F)^T$  jest dowolne, więc

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I} = 0. \quad (3.22)$$

Równanie (3.22) jest układem algebraicznych równań nieliniowych, ponieważ  $\mathbf{H}_N$  zależy od  $\mathbf{F}$ .

Układ równań (3.22) rozwiązujemy metodą iteracyjną, przyjmując następujący proces iteracyjny:

$$\mathbf{H}_L^{(o)} \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad (3.23)$$

$$(\mathbf{H}_L + \mathbf{H}_N^{(n)}) \mathbf{F}^{(n+1)} = \mathbf{I}. \quad (3.24)$$

Równanie (3.23) otrzymano z (3.22) przyjmując  $\mathbf{H}_N \equiv 0$ , co jest równoważne rozwiązaniu odpowiedniego zadania liniowego teorii skręcania prętów. Numeryczne problemy odnoszące się do rozwiązania zadania (3.21) będą przedmiotem dalszych prac.

#### LITERATURA

- [1] Barg J.A., Miszew W.N.: Kruczenie pryzmatycznych stierżni z nieliniowego uprugo materiału, Izv. Wuzow, Str. i Arch., 9, 1972, 42-46.
- [2] Borkowski S.: Skręcanie prętów o przekroju wielospójnym przy uwzględnieniu nieliniowości fizycznej ośrodka, III Ogólnopolska Konf. Zast. Matematyki, Rzeszów - Polańczyk 1974, materiały, 31-33.
- [3] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer Verlag 1958.
- [4] Kosmodamianski O.S., Zima N.E.: Kruczennja fizyczno - nieliniynych apmowanynch stierżniw, Dopowidi AN URSSR, 9, A, 1971, 804-807.
- [5] Wójcik R.: Wariacyjne ujęcie problemu brzegowego teorii skręcania prętów dla ośrodka nieliniowego fizycznie, Zesz.Nauk.Pol.Śl., Mat.-Fiz., [25], 1974, 201-206.
- [6] Zima N.E.: Kruczennja fizyczno-nieliniynogo eliptycznogo stierżnja z ekscentricznoju pozdowżnoju krugowod porożninoju. Teor. i Prikl.mech. wyp. 2, 1971, 78-82.

#### РАЗНОСТНО-ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

#### Р е з ю м е .

В работе даётся метод минимализации функционала, определяющего полную потенциальную энергию крученого стержня, для которого физической моделью является разностно-вариационный метод.

#### THE VARIATIONAL-DIFFERENCE METHOD OF SOLVING BOUNDARY PROBLEM OF THE NONLINEAR THEORY OF TWISTED BEAMS

#### S u m m a r y

This paper describes the method of minimizing the functional which determines the joined potential energy of a twisted beam for a nonlinear Kauderer medium. The variational-difference method has been applied in order to minimize this functional by means of an algorithm of finite elements.