

Marek Wojtylak

NUMERYCZNE PROBLEMY OBLICZANIA WARIANCJI DLA UKŁADÓW OPISANYCH
STOCHASTYCZNYM RÓWNANIEM CAŁKOWYM VOLTERRY II RODZAJU

Streszczenie: W pracy podano metody numeryczne obliczania rezolwenty i wariancji dla stochastycznego równania całkowego Volterry II rodzaju.

Wstęp

W celu przybliżonego wyznaczenia wariancji dla układów opisanych równaniem całkowym Volterry II rodzaju wykorzystano w pracy wzory wyprowadzone w [4]. Dla większej czytelności podajemy poniżej te wzory.

Równanie całkowe:

$$x(t, \omega) = h(t, \omega) - \int_0^t \frac{a(t) + c(t) \cdot (t-u)}{m(u)} x(u, \omega) du \quad (0.1)$$

Rezolwenta

$$R(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_{n+1}(t, u), \quad (0.2)$$

gdzie

$$K_1(t, u) = K(t, u) = \frac{a(t) + c(t) \cdot (t-u)}{m(u)}$$

$$K_{n+1}(t, u) = \int_u^t K_n(t, s) K(s, u) ds \quad n=1, 2, \dots$$

Funkcja korelacji

$$K_x(t_1, t_2) = K_h(t_1, t_2) - \int_0^{t_1} R(t_1, u_1) \cdot K_h(t_2, u_1) du_1 -$$

$$- \int_0^{t_2} R(t_2, u_2) K_h(t_1, u_2) du_2 + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R(t_1, u_1) R(t_2, u_2) K_h(u_1, u_2) du_2 du_1. \quad (0.3)$$

Wariancja dla równania $m(t)\ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} + c(t)y = P(t, \omega)$

$$\sigma_y^2(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{(t-u_1)(t-u_2)}{m(u_1) \cdot m(u_2)} K_x(t_1, t_2) du_2 du_1. \quad (0.4)$$

Problemy numeryczne dotyczące tych wzorów można podzielić na dwie grupy. I tak odpowiednio w części pierwszej pracy zaproponowano pewne metody przybliżonego obliczenia rezolwenty. Druga część jest poświęcona metodom związanym z wyznaczaniem wariancji. W pracy wykorzystano metody numeryczne obliczania całek pojedynczych i podwójnych opisane w [1] i [2].

1. Numeryczne obliczanie rezolwenty

W [4] zaproponowano metodę wyznaczania rezolwenty, która może być podstawą do obliczeń numerycznych. Ponieważ rezolwentę $R(t, u)$ (0.2) można przedstawić w postaci szeregu nieskończonego zatem obliczenie sumy częściowej $R_m(t, u)$ tego szeregu jest równoznaczne z przybliżonym wyznaczeniem rezolwenty. Sposób ten można stosować jednak tylko gdy m jest małe (kilkadziesiąt) gdyż poszczególne wyrazy $K_{n+1}(t, u)$ obliczane są z coraz mniejszą dokładnością. Jest to spowodowane przybliżonym wyznaczeniem $K_{n+1}(t, u)$ ze względu na całkowanie numeryczne, a następnie użycie tej niedokładnej funkcji do obliczenia $K_{n+2}(t, u)$ itd.

Do wyznaczania $K_{n+1}(t, u)$ można wykorzystać wzory Newtona-Coatesa (np. wzór trapezów czy wzór Simpsona). Zastosowanie wzoru trapezów nie nastrocza większych trudności. Przy ustalonym t przedział $(0, t)$ dzielimy na m równych części i wprowadzamy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \frac{t}{m} &= h \\ u_k &= t - k \cdot h \quad k=0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} K_{n+1}(t, u_k) &= \frac{h}{2} \sum_{i=k+1}^m (K_n(t, u_i) \cdot K(u_i, u_k) + \\ &+ K_n(t, u_{i-1}) \cdot K(u_{i-1}, u_k)) \quad k=0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Tak wyliczone wartości $K_{n+1}(t, u_k)$, dla różnych t , używamy następnie do obliczania $K_{n+2}(t, u_k)$.

W ten sposób otrzymamy wartości kolejnych wyrazów szeregu na dyskretnym zbiorze punktów postaci (t_i, u_k) , gdzie $i=0, 1, \dots, T/h_t$, $k=0, 1, \dots, m_i$.

Wykorzystanie metody Simpsona do obliczania poszczególnych całek we wzorze (0.2) jest trudniejsze. Przy poprzednich oznaczeniach wzór analogiczny do (1.2) ma postać:

$$K_{n+1}(t, u_k) = \frac{h}{6} \sum_{i=k+1}^m (K_n(t, u_i) \cdot \lambda(u_i, u_k) + 4 K_n(t, u_i - \frac{h}{2}) \cdot K(u_i - \frac{h}{2}, u_k) + K_n(t, u_{i-1}) K(u_{i-1}, u_k)). \quad (1.3)$$

Zatem aby obliczyć $K_{n+1}(t, u_k)$ dla $k=0, 1, \dots, m$ należy znać wartości funkcji $K_n(t, u)$ w dwukrotnie większej liczbie punktów (dochodzą wszystkie środki przedziałów (u_{i-1}, u_i)).

Dla zastosowania innych metod całkowania numerycznego jak kwadratury Gaussa czy Czebyszewa konieczna jest znajomość $K_{n+1}(t, u)$ w całym przedziale. Jest to możliwe jeżeli po wyznaczeniu dla ustalonego t , wartości funkcji $K_{n+1}(t, u)$ w skończonej liczbie punktów będziemy tę funkcję aproksymować wielomianem. Jednak takie postępowanie kolosalnie wydłuża czas obliczeń i możliwe jest w przypadku dysponowania bardzo szybką maszyną cyfrową.

Rezolwentę $R(t, u)$ można wyznaczyć również w inny sposób. Wzór (0.2) można przekształcić, analogicznie jak w [3] dla rezolwenty równania Fredholm'a, w równanie całkowe

$$R(t, u) = K(t, u) - \int_u^t R(t, s) \cdot K(s, u) ds. \quad (1.4)$$

W celu przybliżonego rozwiązania (1.4) należy aproksymować całkę sumą skończoną. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia (1.1) i przybliżymy całkę przy pomocy wzoru trapezów, otrzymamy następujący układ równań:

$$R(t, t) = K(t, t)$$

$$R(t, u_i) = K(t, u_i) - \frac{h}{2} K(t, t) \cdot R(t, t) -$$

$$- h \sum_{k=1}^{m-1} R(t, u_k) \cdot K(u_k, u_i) - \frac{h}{2} K(t, u_i) R(t, u_i) \quad i=0, \dots, m. \quad (1.5)$$

Po przekształceniu i wprowadzeniu oznaczenia $R(t, u_i) = x_i \quad i=0, \dots, m$ układ ten przyjmie postać:

$$x_m = K(t, t)$$

$$x_i \left(1 + \frac{h}{2} K(t, u_i)\right) + \sum_{k=i+1}^{m-1} x_k \cdot h \cdot K(u_k, u_i) + x_m \frac{h}{2} K(t, t) = K(t, u_i)$$

$$i = m - 1, \dots, 0. \quad (1.6)$$

Macierz tego układu równań jest macierzą górną trójkątną a, przy założeniu $K(t, u) > 0$, elementy na głównej przekątnej są większe od jedności. Zatem wyznacznik tej macierzy jest większy od jedności w związku z czym rozwiązanie zawsze istnieje oraz układ równań jest dobrze uwarunkowany.

Niech $R^*(t, u_i)$ - przybliżona wartość rezolwenty otrzymana jako rozwiązanie układu (1.6), $R(t, u_i)$ - dokładna wartość rezolwenty. Wtedy

$$|R(t, u_i) - R^*(t, u_i)| < M \cdot h^3.$$

Zatem przy odpowiednio dobranym h można wyliczyć wartości rezolwenty zadaną dokładnością.

2. Numeryczne obliczanie funkcji korelacji i wariancji

Niech

$$S(t, u) = \int_0^t R(t, x) K_h(u, x) dx. \quad (2.1)$$

Wtedy, przy założeniu $K_h(t_1, t_2) = K_h(t_2, t_1)$, funkcja korelacji przyjmie postać:

$$K_x(t_1, t_2) = K_r(t_1, t_2) - S(t_1, t_2) - S(t_2, t_1) + \int_0^{t_2} S(t_1, u_2) R(t_2, u_2) du_2. \quad (2.2)$$

Dla obliczenia wartości funkcji $S(t, u)$ można użyć wzoru Simpsona. Niech:

$$t = h \cdot m \quad h > 0 \quad m \in \mathbb{C}$$

$$x_k = k \cdot h \quad (2.3)$$

wtedy

$$S(t,u) = \frac{h}{6} \sum_{i=1}^m (R(t,x_k) \cdot K_h(u,x_k) + 4R(t,x_k - \frac{h}{2})K_h(u,x_k - \frac{h}{2}) + R(t,x_{k-1}) \cdot K_h(u,x_{k-1})). \tag{2.4}$$

Znając wartości $S(t,u)$ w skończonej liczbie punktów całkę we wzorze (2.2) można wyznaczyć stosując wzór trapezów.

Punkty w których możemy obliczyć wartości funkcji $K_x(t_1,t_2)$ są zależne od tego dla jakich t wyznaczyliśmy rezolwentę.

Z kolei wybór metody obliczania wariancji jest zależny od tego w jakich punktach znamy wartości $K_x(t_1,t_2)$.

W celu wyznaczenia wariancji używamy złożonego wzoru trapezów. Zastosowanie innego sposobu pociągnęłoby za sobą duże zwiększenie czasu obliczeń ze względu na powiązania z obliczaniem funkcji korelacji i rezolwenty.

Przyjmując oznaczenia (2.3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(t) = & \frac{h^2}{4} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\frac{t-x_i}{m(x_i)} \frac{t-x_j}{m(x_j)} K_x(x_i, x_j) + \right. \\ & + \frac{t-x_{i-1}}{m(x_{i-1})} \frac{t-x_j}{m(x_j)} K_x(x_{i-1}, x_j) + \frac{t-x_i}{m(x_i)} \frac{t-x_{j-1}}{m(x_{j-1})} K_x(x_i, x_{j-1}) + \\ & \left. + \frac{t-x_{i-1}}{m(x_{i-1})} \frac{t-x_{j-1}}{m(x_{j-1})} K_x(x_{i-1}, x_{j-1}) \right]. \tag{2.5} \end{aligned}$$

Powtarzając obliczenia dla różnych t otrzymujemy tablicę funkcji $\sigma_y^2(t)$. Błąd w ten sposób obliczonych wartości funkcji $\sigma_y^2(t)$ jest rzędu h^3 . Dokładnej wartości błędu nie można wyliczyć praktycznie. Można to zrobić w sposób przybliżony. Jeżeli dwa różne rozwiązania otrzymane przez zastosowanie tych samych wzorów z dwoma różnymi h_1 i h_2 (np. $h_1 = h$, $h_2 = h/2$) są bliskie sobie w granicach zadanego błędu to obliczenia można zakończyć. W przeciwnym razie należy przyjąć $h_1 = h/2$, $h_2 = h/4$ i obliczenia kontynuować.

Na podstawie tej pracy opracowano program dla smc ODRA-1204 i przeprowadzono obliczenia dla różnych przykładów.

LITERATURA

- [1] Demidowicz B.P., Maron I.A.: "Metody numeryczne" cz. 1 i 2 Warszawa 1965.
- [2] Ralston A.: "Wstęp do analizy numerycznej" Warszawa 1971.
- [3] Smirnow W.I.: "Matematyka wyższa" t. IV Warszawa 1962.
- [4] Szopa J.: "O funkcji korelacyjnej dla równania Volterra II rodzaju" Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria "Automatyka" z. 28, Gliwice 1974.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСПЕРСИИ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСАННЫХ
СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРЫ

Резюме

В работе рассмотрены численные методы вычисления дисперсии для систем, описанных стохастическими уравнениями Вольтерры.

NUMERICAL METHODS OF VARIANCE CALCULATIONS FOR SYSTEMS
DESCRIBED BY A RANDOM INTEGRAL VOLTERRA EQUATION

Summary

In the paper there were considered the numerical methods of variance calculations for systems described by a random integral Volterra equation.